

Math. P.
109.fo

Math. P.

Disteli

109 fo

Leipz. Dissertation
auffallen, weil
von 1770 ab von Herrn
Ley (Jah 1747. 10 Tafeln fast
verfunden!

Brückel, M.

6A = Geschp. 1073

DIE
(STEINER'SCHEN SCHLIESSUNGSPROBLEME
NACH
DARSTELLEND GEOMETRISCHER METHODE.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
VORGELEGT DER
HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER
UNIVERSITÄT ZÜRICH
VON
MARTIN DISTELI
VON OLTEN.

BEGUTACHTET VON:
HERRN PROF. DR. A. MEYER UND
HERRN PROF. DR. R. WOLF.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1888.

DIE

STEINER'SCHEN SCHLIESSTUNGSFORMEN

NACH

DARSTELLUNG GEOMETRISCHER METHODEN

IN ALCURAL-DISSEKTATION

VON

ERLANGUNG DER DOCTORWURDE

VERGLEICHEN

HOHEN PRÄSIDENTEN DER UNIVERSITÄT

DER

UNIVERSITÄT



MAKING

RECEIVED

RECEIVED

RECEIVED

RECEIVED

1882

HERRN

DR. WILHELM FIEDLER

PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU ZÜRICH

IN

HOCHACHTUNG UND DANKBARKEIT

GEWIDMET.

WILHELM

DR. WILHELM FIEDER

PROFESSOR DER PHYSIK UND MATHEMATIK

IN

HOCHSCHULE UND UNIVERSITÄT

STUTTGART

Seit Steiner's Veröffentlichung „Geometrische Lehrsätze“ im 32. Bande des Crelle'schen Journals (p. 182—184, 1845 und „Werke“: p. 371—373) hat das Schliessungsproblem bei ebenen Curven dritter und vierter Ordnung vom Geschlecht Eins mehrfache Behandlung erfahren; zunächst in analytischer Form durch Clebsch¹⁾; dann in geometrischer durch die Herren Küpper²⁾ und Schoute³⁾, durch welche mit demselben Satze über ebene Curven dritter Ordnung als Ausgangspunkt die Steiner'schen Sätze im Wesentlichen nach übereinstimmender Methode in der Ebene bewiesen worden sind. Schon im Mai 1869 ist durch Herrn Emil Weyr⁴⁾ dasselbe Problem für rationale Curven mit geometrischen Mitteln behandelt, dann in einem Zusatze zu dieser Arbeit von mehr analytischer Richtung auf die allgemeinen Curven dritter Ordnung erweitert worden, wohl zum ersten Male mit Hinweisung auf seine räumliche Bedeutung für die Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiten Grades; ein Umstand, der von Herrn Schur⁵⁾ bei anderer Gelegenheit berührt worden, und in neuester Zeit durch Herrn Eberhard⁶⁾ mit Interpretation und Erweiterung der Steiner'schen Theoreme unter theilweiser Zugrundelegung der Küpper'schen Arbeit für die

¹⁾ Clebsch: Crelle's Journal Bd. 63. p. 94 ff. (1864.) ²⁾ Küpper: Abh. der k. böhmischen Gesellsch. der Wissensch. (VI. Folge VI. Bd.) (1873) und Math. Annalen Bd. 24. p. 1—41 (1883). ³⁾ Schoute: Crelle's Journal Bd. 95. p. 105 ff. und p. 320 ff. (1883). ⁴⁾ E. Weyr: Crelle's Journal Bd. 71. p. 16, 18. (1870) und ebenda Bd. 73. ⁵⁾ Schur: Math. Annalen Bd. 20 p. 262 (1882). ⁶⁾ Eberhard: Zeitschrift für Math. und Physik 32. Jahrgang Heft 2—3 (1887).

Raumcurven vierter Ordnung und beider Species aufgenommen worden ist.

Als tetraedal-symmetrische Curve und Grundcurve eines Flächenbüschels ist die Raumcurve vierter Ordnung erster Art Träger regelmässiger Gruppen von Punkten, Geraden und Ebenen, die Herrn Ameseder⁷⁾ zu einer Untersuchung Veranlassung gaben, welche in naher Beziehung zu den Steiner'schen Fragen steht. Nach der Natur ihrer Entstehung sind jene Punktgruppen Elemente bestimmter Punktinvolutionen der Raumcurve und ihre Bedeutung hängt an der Existenz von Involutionen der Flächen im Büschel, deren Regelschaarinvolutionen aus ihrer projectivischen Verbindung die Steiner'schen Secantenpolygone hervorgehen lassen. In dieser Form ist das Problem insbesondere vom Standpunkt der darstellenden Geometrie aus zu fassen, welchen die vorliegende Arbeit einnimmt.

Die darstellend geometrische Behandlung stützt sich auf den Umstand, die Raumcurve vierter Ordnung erster Art als Durchdringungscurve zweier Kegel zweiten Grades untersuchen zu können, und zwar mit allen ihren Special- und Degenerationsformen. Die einfachen Hyperboloide ihres Büschels, die bei keiner Durchdringung fehlen, übernehmen dabei die Rolle von Trägern reeller Steiner'scher Secantensysteme, und führen schon bei der Construction der Curve aus achtpunktigen Gruppen auf den Zusammenhang von je vier Flächen mit den Steiner'schen Vierseiten und damit zur Frage nach den Steiner'schen Polygonen überhaupt.

Man wird sagen können, dass mit der grundlegenden Arbeit von Clebsch das Problem in seiner allgemeinsten Form erledigt war, dass dagegen die geometrische Methode der Behandlung nach dem Princip der Centralprojection den Vortheil gewährt, alle Formen der Curven dritter Ordnung ohne Rücksicht auf das Geschlecht nach einheitlichen Gesichtspunkten

⁷⁾ Ameseder: Bd. 87. p. 1179. Aprilheft der Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. 1883 und in neuester Zeit: Bd. XCIII der Sitzberichte der k. Akad. der Wissensch. Januarheft 1886.

zu umfassen, und dass sie durch Zuziehung des Raumes zur Erledigung der Frage die einfachsten constructiven Mittel zur wirklichen Darstellung der Ergebnisse liefert, weil sie erlaubt, die Punktinvolutionen auf der Curve vom Geschlecht Eins durch Flächeninvolutionen im Büschel, also in einem rationalen Träger zu untersuchen, und weil eine Erweiterung in der Dimension des Untersuchungsgebietes nur von einer Vereinfachung der Constructionen am Gebilde selbst begleitet sein wird. Die Ausdehnung des Problems auf Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und der unmittelbare Zusammenhang mit der zweiten Steiner'schen Mittheilung (dasselbe Journal Bd. 32, p. 300—304 und „Werke“ Bd. II, p. 377—380) treten dabei besonders deutlich hervor.

Die vorliegende Untersuchung geschah in engem Anschluss an die constructive Behandlung der Durchdringungscurven zweier Kegel zweiten Grades, welche Herr Professor Fiedler im zweiten Bande seines Werkes „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage“ (pg. 104—188 III. Aufl. 1885) gegeben hat und welche 1885 schon die Grundlage einer Diplomarbeit am eidg. Polytechnikum für den Verfasser vorliegender Schrift gebildet hat. An diese knüpfte sich naturgemäss die Frage nach dem Steiner'schen Vierschluss auf demselben Wege räumlicher Anschauung, mit der erfreulichen Bestätigung, die unabhängig gemachte Untersuchung methodisch in Uebereinstimmung zu sehen mit der vorausgegangenen von Herrn Professor Fiedler über denselben Gegenstand, deren Ergebnisse im dritten Bande des genannten Werkes (pag. 329—354) niedergelegt sind, und deren Priorität hier ausdrücklich hervorgehoben werden soll.

Dazu sei an dieser Stelle bemerkt, dass meiner in vorliegender Arbeit unter Abschnitt I gegebenen Entwicklung an Hand der dazu gehörenden Figuren der Taf. I und IV schon vor ihrer jetzigen Veröffentlichung die Ehre der Aufnahme in dem genannten Werke (pag. 354—363) zu Theil geworden ist. Die an den eben bemerkten Stellen dieses Werkes — auf das

in der Folge unter (D. G.) hingewiesen werden soll — gegebenen Entwicklungen bilden den Anfang einer darstellend geometrischen Untersuchung der Steiner'schen Schliessungssätze überhaupt und damit ein altes Programm (Vorrede Bd. II. p. XI f.) meines hochgeehrten Lehrers, für dessen fördernde Anregung mit manchem werthvollen Wink auf Weiterführung und Abschluss der vorliegenden Fragen ich gerne an dieser Stelle dem aufrichtigsten Danke Ausdruck gebe.

Die Steiner'schen Involutionen von Fundamentalpunkten des $2n$ -Schlusses für $n = 2^k$.

Zwei Flächen zweiten Grades durchdringen sich in einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art R_4 , der Grundcurve des durch die beiden gegebenen bestimmten Büschels von Flächen zweiten Grades, welche von den Ecken des allen gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole und Polaren, dem Tetraeder der Kegelspitzen, doppelt projecirt wird, so dass sie also gleichzeitig als Durchdringungscurve von zwei Kegeln zweiten Grades erscheint — den Fall ausgeschlossen, wo das Tetraeder imaginär wird: eine Durchdringung, die sich in der folgenden Untersuchung als zurückführbar auf eine solche mit vier reellen Kegeln erweist. In diesem Falle bleibt ein Paar windschiefer Gegenkanten des Tetraeders reell, als Träger quadratischer Punkt- und Ebeneninvolutionen, deren nicht reelle Doppelemente die Ecken und Seitenflächen des Tetraeders sind; die eine oder beide Involutionen können aber auch hyperbolisch sein: ein Büschel mit zwei oder vier reellen Kegeln, und mit der entsprechenden Eigenthümlichkeit für die Raumcurve, dass sie im Falle von zwei reellen und zwei nicht reellen Kegelflächen eintheilig, im Falle von vier reellen zweitheilig ist. Der Uebergang von dieser Form zu jener geschieht durch den Fall der Berührung der Kegelflächen, oder der Curve mit Doppelpunkt, wobei zwei der vier reellen Kegel sich in den uneigentlich doppelt projecirenden Kegel aus dem Doppelpunkte zusammengezogen haben. Mit diesem ist endlich noch ein dritter Kegel vereinigt zu denken, wenn die gemeinschaftliche Tangentialebene aller Flächen im Doppelpunkte ihn berührt, oder im Falle der Raumcurve vierter Ordnung mit Spitze. Die beiden Formen der Curve mit Doppelpunkt und Spitze sind rational und das Hinzutreten eines

zweiten Doppelpunktes bewirkt das Zerfallen, entweder in eine Raumcurve dritter Ordnung R_3 und eine reell oder nicht reell schneidende Bisekante, also wieder mit zwei reellen oder nicht reellen Kegelflächen, oder in zwei Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen reellen oder imaginären Schnittpunkten. Das Zerfallen der Raumcurve R_3 oder der beiden Kegelschnitte giebt endlich die Formen der Curve mit drei Doppelpunkten aus Kegelschnitt und Geradenpaar, und mit vier solchen oder des windschiefen Vierseits (D. G. Bd. II p. 104 ff.).

I.

1. Wir beginnen die Betrachtung mit dem Falle der zweitheiligen Raumcurve R_4 , oder des ganz reellen Tetraeders der vier Kegelmittelpunkte $M_1 \dots M_4$ und der Gegenebenen $P_1 \dots P_4$. Sind in Taf. I $M_1 L_1$ und $M_2 L_2$ die darstellend geometrischen Daten der Durchdringung zweier Kegelflächen zweiten Grades für einen ihnen gemeinsamen Punkt, also für einen Punkt der Raumcurve als Centrum, so haben wir als Bild der Durchdringung eine circulare zweitheilige Curve dritter Ordnung C_3 zu erwarten, wenn die Polarinvolutionen am Durchstosspunkt S_{12} von $M_1 M_2$ in Bezug auf die Spuren L_1 und L_2 nicht sich trennende reelle Doppelemente besitzen (D. G. Bd. II p. 156). Wählt man den Punkt S_{12} als Schnittpunkt zweier zu einander normaler Durchmesser der Spurkreise, so sind diese für beide Involutionen das gemeinsame Paar, also die Spuren s^{P_3} und s^{P_4} der beiden durch die Kante $M_1 M_2$ gehenden Tetraederebenen; ebenso sind die Polaren von S_{12} für die Kreise L_1 und L_2 die Spuren s^{P_2} und s^{P_1} resp. der beiden andern Tetraederebenen an der Kante $M_3 M_4$, und die Schnittpunkte dieser vier Spuren also die Durchstosspunkte S_{ik} der sechs Tetraederkanten, mit S_{13} und S_{24} nach der Disposition als unendlich fern.

Diese metrischen Specialisirungen, die an der Annahme kreisförmiger Spuren der Kegel hängen im Sinne der Einfachheit und Genauigkeit der Construction, sind durchaus nicht beschränkend für die Allgemeinheit der Untersuchung; durch eine

collineare Transformation verschwinden die metrischen Merkmale und werden zu projectivischen des allgemeinen Falles.

Nach der Eigenschaft einer Tetraederebene als gemeinschaftlicher Polarebene der Gegenecke für die drei Kegel-
flächen, deren Spitzen sie enthält, sind drei Punkte S_{ik} mit demselben ersten Index die Diagonalepunkte eines vollständigen Vierecks von Punkten einer Spur L_i , mit den Tangentenpaaren an die drei übrigen Spurkreise als Seiten. Das Tangentenpaar aus S_{12} an L_2 bestimmt auf L_1 ein vollständiges Viereck, dessen zwei weitere Seitenpaare sich in S_{13} und S_{14} begegnen und die noch fehlenden Spuren L_3 und L_4 als Tangentenpaare an diese eindeutig bestimmen. Die Construction der Durchdringung geschieht im Folgenden mit Benutzung der vier centrischen Involutionen, die für jede Ecke und Gegenebene des Tetraeders in Bezug auf die Raumcurve statthaben, also durch Punkte und Tangenten in Gruppen zu acht (D. G. Bd. II p. 173—179).

Die Punkte P jeder solchen Gruppe liegen vier Mal paarweise zu vierten in Strahlen durch die Tetraederecken und sechs Mal zu vierten in Paaren von Ebenen durch die Tetraederkanten, welche mit den Tetraederebenen je eine harmonische Gruppe bilden. Daraus folgt, dass die in einem solchen Ebenenpaare gelegenen Paare von Diagonalen des Vierecks der P ein windschiefes Vierseit von Doppelsekanten der Raumcurve bilden, dessen Ecken auf zwei Gegenkanten des Tetraeders liegen und mit den Punkten M_i desselben auf diesen harmonische Gruppen bilden. Sie formiren demnach jedesmal auch ein windschiefes Vierseit für eine bestimmte Fläche des Büschels. Aus jeder Gruppe zu acht entstehen drei solche Vierseite und drei Flächen; ihren Zusammenhang mit einer vierten als geschlossener Gruppe werden wir bald hervortreten sehen.

Für ein gegebenes Paar von Tetraedergegenkanten ordnen die Vierseite auf diesen die Paare der Punktinvolutionen der Kegelspitzen in projectivische Zuordnung, nämlich in Punktepaare, welche durch die zugehörige Fläche des Büschels ausgeschnitten werden, und sie bringen die Paare der Ebeneninvolutionen der Tetraederflächen um dieselben Kanten in pro-

jectivische Zuordnung, als die Paare von Tangentialebenen durch diese an je dieselbe Fläche des Büschels; ihre Gesamtheit erfüllt also eine Regelfläche, die nach ihrer dualen Erzeugungsweise als solche vierter Ordnung und Classe $R^{(4)}$ mit dem betrachteten Paare von Tetraederkanten als Doppelgeraden erkannt wird. Sie hat mit jeder Fläche des Büschels ausser der Raumcurve R_4 ein windschiefes Vierseit gemein; jede der Kegelflächen berührt sie nach zwei in einer Tetraederfläche gelegenen Erzeugenden; die Ebeneninvolution um die Tetraederkante erscheint dabei als ihre doppelt umschriebene Developpable. Auf diese Weise entstehen drei Flächen $R^{(4)}$; wir wollen ihre Erzeugenden, welche zugleich Doppelsekanten der Raumcurve und des Tetraeders sind, Linien g nennen. Auf jeder Fläche des Büschels liegen dann drei Vierseite von Linien g , welche sich in vierundzwanzig Punkten begegnen, die zu acht je einer Durchdringungscurve zweier Flächen $R^{(4)}$ angehören¹⁾.

Die sechs Ebeneninvolutionen um die Kanten des Tetraeders geben aber, wenn ihre Scheitelkanten sich schneiden, einem Kegel vierter Ordnung mit drei Tetraederkanten als doppelten Inflexionserzeugenden die Entstehung. Die Durchdringungscurve zwölfter Ordnung R_{12} zweier Flächen $R^{(4)}$ besitzt also in den Tetraederecken vierfache Punkte und wird aus diesen durch die genannten Kegel vierter Ordnung doppelt projecirt. Da zwei solche Kegel längs einer Kante die Inflexionstangentialebenen gemeinsam haben, so stellen die Tetraederkanten ihre Gesamtdurchdringung dar, und zwei Curven R_{12} können sich demnach nur in den Tetraederecken schneiden; dagegen hat jeder doppeltprojicirende Kegel der Raumcurve R_4 mit dem Kegel vierter Ordnung an derselben Spitze acht Erzeugende gemein, welche aus der R_4 die zwei achtpunktigen Gruppen herauschneiden, welche die Curven R_{12} und R_4 gemeinsam haben und welche mit den acht veränderlichen Punkten die vierundzwanzig Schnittpunkte jeder Fläche des Büschels mit der R_{12} ausmachen.

Die drei Curven R_{12} schneiden somit aus R_4 sechs Gruppen von acht Punkten, in welchen sich die Seiten zweier ver-

1) Man vergl.: Harnack, Math. Annalen Bd. XII. p. 72.

schiedener Vierseite derselben Fläche des Büschels begegnen, und auf deren Bedeutung wir im Folgenden geführt werden.

2. Wir kehren zu unserer Disposition Taf. I zurück. Die Punkte M_i' der vier Kegelspitzen sind Bilder von Punkten einer Gruppe von acht auf der R_4 , zu welcher auch das Centrum gehört und entspringen mit den noch fehlenden vier Punkten aus dem Paare von Hülfebenen der Spuren h_{12} in der Involution um S_{12} , von denen die eine projicirend. Die zwei vollständigen Vierecke, die durch die Schnittpunkte mit den Kegelspuren L_1 und L_2 bestimmt werden, liefern als Ecken je zwei Paare schon bekannter Durchstosspunkte S_{ik} . Durch M_1' und M_2' gehen je drei dieser Linien, die Spuren h_{1k} und h_{2k} ($k = 1, 2, 3$) der projicirenden Ebenen für die drei Tetraederkanten, die resp. in M_1 und M_2 zusammentreten. Die analoge Vervollständigung des Spurenpaares h_{13} am Punkte S_{13} auf L_3 bestimmt die projicirenden Ebenen der Tetraederkanten an M_3 und M_4 ; wir sind somit in den Stand gesetzt, die Bilder der sechs Tetraederkanten direct und die acht Punkte der das Centrum enthaltenden Gruppe gleichmässig aus sechs Ebenenpaaren an diesen Kanten zu bestimmen.

Wir gelangen so zu den noch fehlenden vier Punkten M , von denen der eine im Bilde als Durchstosspunkt S_t^c der Tangente im Centrum als gemeinsamer Schnittpunkt der vier Tangenten in den Punkten M_i' erscheint. Den Bildern der Kegelspitzen, sowie den vier Bildpunkten M' — in der Figur sind die Projectionsstriche der Deutlichkeit halber weggelassen — entsprechen je vier Punkte auf der Raumcurve, die durch Linien g von einander getrennt sind.

Die Tangenten in den Punkten einer Gruppe zu acht haben aber die Eigenschaft, dass jede derselben von vier andern geschnitten wird, wo sie den Ebenen des Tetraeders begegnet, sie gehören somit zu vier je einer Regelschaar eines Hyperboloids im Büschel an. Die acht Punkte einer Gruppe theilen sich demnach naturgemäss in zwei Halbgruppen oder Quadrupel, wie diejenigen der Punkte M_i und M . Die Durchstosspunkte der Tangenten der letzteren sind somit vier Punkte des Spurkreises S^c für das durch die Centrumstangente bestimmte

Hyperboloid H^c , und die vier Tangentenbilder selbst begegnen sich demnach in einem zweiten reellen Schnittpunkte F desselben mit der Curve. Andererseits gestatten die vier Punkte M sechs Verbindungslinien, als Linien g im Raume paarweise auf derselben Fläche gelegen; somit sind auch die drei Diagonalepunkte des Vierecks der M Punkte der Curve.

Die vier Tangenten der C_3 aus dem Punkte F können drei Mal als Paare je einer quadratischen Strahleninvolution aufgefasst werden; die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte als Doppelemente je einer solchen an einem der drei andern Punkte F . Bringt man irgend eine dieser letztern mit der entsprechenden der drei ersten in projectivische Verbindung, indem man in beiden als drittes Paar dasjenige sich entsprechen lässt, das aus der Verbindungslinie der beiden Scheitel hervorgeht, so tritt als Erzeugniss eine Curve dritter Ordnung auf, die mit der vorliegenden C_3 nebst den Scheiteln F die vier Punkte M und ihre Tangenten gemein hat, also nothwendig mit ihr identisch ist. Daraus folgt, dass die Tangenten in den vier Punkten F sich in einem Punkte T der Curve begegnen; dass diese somit ebenfalls den Punkten eines Quadrupels im Raume entsprechen und aus ihrer paarweisen Verbindung drei weitere Punkte T einer Gruppe analogen Zusammenhanges ergeben, weil sie aus den F und diese aus den M ebenso abgeleitet sind, wie die Punkte M aus den M_i' .

Die vier Bildpunkte F eines Quadrupels zeigen alle dasselbe Verhalten unter sich; je nach der Combination mit einem der drei andern entsteht an jedem derselben eine von drei quadratischen Involutionen, die durch Scheitelstrahl und Tangente ergänzt, die Curve als Erzeugniss ihrer projectivischen Verbindung ergeben:

Je zwei Punkte F sind somit Fundamentalpunkte¹⁾ für eine unendliche Folge Steiner'scher Vierseite und eröffnen damit die Frage nach solchen Polygonen überhaupt.

1) Wir schreiben in der Folge abkürzend F.-Punkt.

3. Durch die vier Punkte F gehen vier Kreise des Büschels, die Spuren der vier Hyperboloide, deren zugeordnete Regelschaaren jene Strahleninvolutionen zu Bildern haben, so dass je ein Paar von Erzeugenden der einen Fläche sich mit einem Paare jeder der drei andern zu einem geschlossenen windschiefen Vierseit, einem Steiner'schen Sekantenpolygon zusammensetzt, dessen Ecken auf der Raumcurve liegen. Durch Combination einer der vier Flächen mit den drei andern entstehen auf diesen drei Involutionen ihrer Regelschaaren, die im Bilde bestimmt sind durch eine Zusammenfassung der vier Tangenten an die C_3 in zwei Paare, und die jedesmal zu drei Polen P bezüglich des zugehörigen Spurbereiches führen, welche für diesen ein Polardreieck bilden, und welche selbst paarweise auf sechs Kreisen des Spurbereiches liegen, die sie als Träger projectivischer Strahlenbüschel hervorbringen. Es hat dabei in Taf. I seinen Grund in der Rechtwinkligkeit der Spuren s^{P_3} und s^{P_4} , dass jedesmal einer dieser Pole ins Unendliche fällt.

Die Combination der beiden Involutionen, deren Scheitel auf dem unendlichen Aste der Curve C_3 liegen, ergiebt reelle Doppelemente der zuerst betrachteten Strahleninvolution, die offenbar nach den Berührungspunkten N der Tangenten aus dem Scheitel F der andern gehen. Die Punkte N sind somit wieder Bilder von Punkten eines Quadrupels, und da F ein Diagonalepunkt ihres Vierecks ist, so fallen die beiden fehlenden Diagonalepunkte mit den beiden andern F zusammen. Für die beiden F mit nicht reellen Tangenten sind somit die Involutionen bestimmt durch ihre Doppelemente, oder durch zwei Vierseite nach den Ecken M und N . Als Linien g schneiden die in den Doppelstrahlen der Involution am ersten Punkte F projecirten Verbindungsgeraden der Punktepaare N die Tetraederkanten M_2M_3 und M_1M_4 , bestimmen mit diesen zwei Ebenen und damit direct wie in Taf. I die Punkte N mittelst der in ihnen liegenden Kegelerzeugenden.

Wir haben in den betrachteten vier Flächen das Element einer Flächeninvolution vierter Ordnung im Büschel; denn die vier Punkte F , deren projecirende Strahlen jene räumlich bestimmen, sind nach ihrer Construction selbst vier Punkte einer

involutorischen Gruppe, und offenbar entsteht die ganze Flächeninvolution, wenn man nacheinander alle Quadrupel der Raumcurve mit dem Centrum C verbindet. Der Punkt C ist aber ein willkürlicher Punkt der Raumcurve; bewegt er sich über die ganze Curve R_4 , so wird die Flächeninvolution unendlich oft erzeugt: Verbindung irgend eines Punktes der Raumcurve mit allen ihren Quadrupeln und Verbindung eines beliebigen Quadrupels mit allen Punkten der R_4 liefert dieselbe Flächeninvolution. Daraus ergeben sich für die Projection oder die vorliegende Curve dritter Ordnung sofort die beiden Sätze von Clebsch:

Die Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes P der C_3 mit den vier Punkten einer Gruppe von F.-Punkten F begegnen der Curve in Punkten F' einer zweiten Gruppe, so dass man aus einer einzigen Gruppe alle erhält, wenn P die ganze Curve durchläuft. Und:

Verbindet man zwei beliebige Gruppen von Punkten P und P' unter sich, so schneiden sich ihre sechzehn Verbindungsgeraden zu vier in vier Punkten F einer dritten Gruppe von F.-Punkten; ihre Tangentialpunkte T liegen also in einer geraden Linie.

Diese Beziehung ist nichts anderes als der zusammenfassende Ausdruck für eine Reihe von Vierseitconstructions. Die acht Punkte P und P' bilden für jedes Paar von Punkten F die Ecken zweier Vierseite; die Gegenecken jedes Vierseits sind F.-Punkte und gehören zu beiden Gruppen P und P' . Zu jedem Vierseite zweier F.-Punkte gehört ein zweites, dessen Ecken die der ersten zu zwei Vierergruppen P und P' ergänzen; ihre beiden Tangentialpunkte liegen jedesmal mit demjenigen der F.-Punkte in gerader Linie.

Jedes Element der Flächeninvolution besteht nach Construction aus den durch die Diagonalen eines Quadrupels und die Tangenten der Raumcurve in diesen bestimmten vier Flächen, von denen die drei ersten schon zu Anfang der Betrachtung zusammen aufgetreten sind. Für diese haben sich die Diagonalen oder Linien g als Doppelemente der Invo-

lution ihrer Regelschaaren bei Combination mit der vierten erwiesen, und führten als solche zu den Berührungspunkten der Tangenten dieser Fläche. Aber die Doppelemente jeder Combination müssen gegenseitig zu den Berührungspunkten der Tangenten ihrer Flächen führen, da sie die degenerirten unter den Vierschlusspolygonen darstellen, d. h. die Doppelemente jeder Involution sind Linien g , und die zwölf Quadrupel, welche sie aus der Curve schneiden, sind somit identisch mit den vier Quadrupeln der Berührungspunkte der Tangenten oder der Berührungs-Quadrupel¹⁾, wie wir uns kurz ausdrücken wollen. Die auf jeder Fläche gelegenen drei Paare von Linien g gehen nach den B.-Quadrupeln der drei andern und die durch ein B.-Quadrupel bestimmten drei Paare von Linien g sind die Doppelemente der Involution der drei übrigen.

Die von uns betrachteten zusammengehörigen vier Hyperboloide gehören paarweise verschiedenen Serien mit reellen und nicht reellen Tangenten an (D. G. Bd. II p. 358); von den vier B.-Quadrupeln sind daher zwei reell, nämlich M und N , die beiden andern P und Q imaginär, aber je auf einem reellen Paare von Linien g .

4. Man fasst die Involution vierter Ordnung im Flächenbüschel übersichtlich zusammen durch die Involution von Tangentialebenen an die einzelnen Gruppen im Centrum C der Projection, deren Spuren vom Punkte S_i^c nach den Gruppen von F.-Punkten F gehen. Eine Vereinigung zweier Flächen einer Gruppe in eine einzige entsteht, wenn eine Verbindungsgerade zweier Punkte F durch S_i^c geht; im Raume sind also diejenigen Linien g zu finden, welche die Tangente t im Centrum schneiden, d. h. die sechs Linien g des durch t bestimmten Hyperboloids H^c , welche mit t zur andern Schaar gehören.

Ihre Bilder sind demnach die Doppelemente der drei Involutionen, welche durch die Tangentenpaare nach den Punkten M_i' am Punkte S_i^c bestimmt sind, und ihre Bestimmung erfolgt durch drei bekannte Pole P eines Tripels bezüglich des

1) In Analogie mit der vorigen Abkürzung schreiben wir fortan B.-Quadrupel.

Spurkreises S^c . Zwei der construirten Doppelstrahlenpaare $s_v^{(4)}$ sind somit reell, aber nur das eine mit reellen Schnittpunkten $F_v^{(4)}$ der C_3 . Diese Geraden sind die Spuren der projecirenden Tangentialebenen der sechs sich selbst entsprechenden oder Vierschlussflächen $V^{(4)}$, von welchen daher zwei hyperbolisch, zwei reell elliptisch und zwei nicht reell sind¹⁾. Es zeigt sich dabei insbesondere, dass die Vereinigung paarweise innerhalb dreier verschiedener Gruppen vor sich geht, so dass eine solche Gruppe nur Flächen $V^{(4)}$ enthält, eine Eigenschaft, die sich später wiederholt. In jeder der drei Gruppen sind die beiden B.-Quadrupel paarweise zu achtpunktigen Gruppen zusammengetreten, und für jede von diesen liegen in beiden Schaaren zwei Paare von Linien g auf der einen, das dritte auf der andern Fläche; sie sind somit die drei Paare achtpunktiger Gruppen, welche die drei Raumcurven R_{12} aus der Curve R_4 herausausschneiden²⁾.

Aber die für das Hyperboloid H^c abgeleiteten Beziehungen gelten auch für die drei andern Flächen der Gruppe. Durch die beiden Regelschaaren werden die vier achtpunktigen Gruppen von Berührungspunkten in zwei Abtheilungen von Quadrupeln M, N, P, Q und M^*, N^*, P^*, Q^* getheilt; dann sind die sechs Ebenen durch jeden der vier Punkte eines unbezeichneten Quadrupels — sagen wir beispielsweise M — nach den drei Paaren von Verbindungslinien innerhalb der drei bezeichneten N^*, P^*, Q^* , welche mit den Tangenten in M auf derselben Fläche liegen, die Tangentialebenen der sechs sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(4)}$ in den Punkten M ; d. h. die Verbindungsgeraden der Punkte eines unbezeichneten Quadrupels M mit denjenigen der drei bezeichneten N^*, P^*, Q^* sind zu acht Erzeugende derselben Fläche $V^{(4)}$; die sechzehn Verbindungsgeraden der Punkte M_i' mit den Punkten N unserer Figur gehen daher zu vieren durch die Punkte $F_v^{(4)}$.

1) Man vergl.: Voss: Math. Annalen Bd. V. p. 164, wo diese Flächen zuerst auftreten.

2) Sie sind die 24 Punktepaare mit der Beziehung, dass jeder von beiden in der Schmiegungebene des andern liegt.

Nach der eben ausgesprochenen Beziehung verbinden die Seiten jedes Polygons einer Fläche $V^{(4)}$ zwei Punkte M mit zwei Punkten N^* ; seine Diagonalen sind Linien g und schneiden demnach für das zusammengehörige Paar der hyperbolischen Flächen $V^{(4)}$ die Gegenkanten $M_2 M_3$ und $M_1 M_4$; für das Paar elliptischer $V^{(4)}$ die Kanten $M_2 M_4$ und $M_1 M_3$; endlich für das Paar der nicht reellen $V^{(4)}$ die Kanten $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$. Als conjugirte Geraden der Flächen $V^{(4)}$ bestimmen sie ferner an den genannten Kantenpaaren die Polarinvolutionen $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(2)}$ der Umrisskegel des zugehörigen Paares der $V^{(4)}$ aus den Punkten M_i , und weil die Ebenenpaare durch eine Kante nach vier Punkten M oder N^* ein Paar der Involution der Tetraederebenen bilden, so kann an jedem windschiefen Kantenpaar durch eine Transformation der einen Elementenreihe in dieser die Involution $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ der einen Fläche in diejenige $\mathfrak{P}_2^{(2)}$ der andern übergeführt werden und umgekehrt. Weil endlich jede Ebene zweier Punkte N^* durch eine Tetraederkante auch zwei Punkte N enthält, so können wir mit Benutzung einer der Involutionen $\mathfrak{P}^{(2)}$ an drei Kanten durch dieselbe Ecke M_i zu einem Quadrupel von Punkten M die drei übrigen der N, P, Q ableiten.

Die Doppelemente der einen Involution, $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ beispielsweise, sind stets reell, und das symmetrische Paar der andern $\mathfrak{P}_2^{(2)}$ mit nicht reellen; sie gehen nach den drei Paaren der achtpunktigen Gruppen von Berührungspunkten der Flächen $V^{(4)}$. Das Paar der Tetraederebenen ferner ist für beide Involutionen seiner Kante das gemeinsame Paar d. h. die zwei Gruppen von acht Verbindungslinien, welche aus der paarweisen Combination der Scheitel S_i der Curve R_4 in allen vier Tetraederebenen gleichzeitig entspringen, liegen auf derselben Fläche $V^{(4)}$. Ihre Zahl ist im Ganzen 96 und wird durch die 24 in den Tetraederebenen selbst gelegenen Verbindungslinien auf die Zahl von 120 Geraden zwischen den 16 Punkten stationärer Schmiegungebenen gebracht. Da also durch Verbindung der direct construirbaren Scheitel S_i die Flächen $V^{(4)}$ sofort erhalten werden, so können zum Quadrupel M die drei andern N, P, Q zu-

gefügt werden, indem man von den Ecken des Quadrupels M^* aus auf jeder Fläche $V^{(4)}$ das geschlossene Vierseit construirt. Es sei angemerkt, dass in der Ausführung der Taf. I die Scheitel S_2 als den F benachbart auf dem Ovale weglassen sind.

5. Noch eine räumliche Beziehung. Auf jeder Fläche des Büschels schneiden sich die drei Vierseite von Linien g in 24 Punkten, die in Gruppen zu acht je einer Curve R_{12} angehören. Die Ebene zweier solcher Linien g enthält demnach zwei Punkte aus einem unbezeichneten und zwei aus einem bezeichneten Quadrupel wie z. B. in der Figur die Ebene durch die Gerade vom Bilde $M_1' M_3'$, welche die Gerade zweier Punkte N in A schneidet. Die zwei Paare von Verbindungslinien obiger Gruppen, die nicht Linien g , sind also Erzeugende für zwei Flächen $V^{(4)}$; es schneiden sich demnach die Geraden $M_1' N$ und $M_3' N$ in der Projection in zwei Punkten $F_v^{(4)}$, d. h. die gemeinsame Developpable zweier Flächen $R^{(4)}$ ist auch die gemeinsame Developpable zweier Flächen $V^{(4)}$ und zwar jedesmal für ein Paar zusammengehörender derselben, ist also von der vierten Classe¹⁾.

Diese Developpable vierter Classe ist aber nicht die gesamte Developpable, welche zweien Flächen $V^{(4)}$ gemeinsam ist; vielmehr entsteht aus der Gesamtheit der Ebenen, welche drei Punkte eines Quadrupels enthalten, eine neue, allen drei Flächen $R^{(4)}$ gemeinsame Developpable. Ecke und Gegenebene des Tetraeders aus vier Punkten eines Quadrupels sind Pol und Harmonikalebene in Bezug auf das Tetraeder der Punkte M_i und in dieser reciproken Zuordnung entsprechen die Flächen $R^{(4)}$ aus Linien g sich selbst, der zweien von ihnen gemeinsamen Developpablen ihre gemeinsame Durchdringung zwölfter Ordnung, der ihnen gemeinsamen Durchdringungscurve R_4 die ihnen gemeinsame Developpable zwölfter Classe, mit Doppelcurven vierter Classe, welche die Tetraederkanten zu Doppelrückkehrtangente in den Ebenen P_i besitzen. Jede Curve R_{12} schneidet die Curve R_4 in zwei achtpunktigen

1) Man vergl.: Ameseder, Sitzb. der k. Akad. der Wissensch. Aprilheft 1883. pag. 16, 22, 37.

Gruppen von Berührungspunkten eines Paares von Flächen $V^{(4)}$ und jede Developpable vierter Classe hat mit derjenigen zwölften Classe die aus jenen entspringenden Octaeder von Tangentialebenen gemein.

Jedes Tetraeder aus vier Punkten eines Quadrupels schneidet die Raumcurve R_4 in einem weitem Quadrupel, dem projecirenden für eine Ecke des ersten als Centrum und für die durch das Quadrupel bestimmte Gruppe der Flächeninvolution. Das zweite Quadrupel wird demnach von den Schmiegungebenen der R_4 in den Ecken des ersten ausgeschnitten. Von den zwölf Ebenen der Developpablen zwölften Classe durchs Centrum sind drei die Ebenen des durch dasselbe bestimmten Quadrupels, die neun andern enthalten je drei Punkte eines solchen, für welche das Centrum der vierte Schnittpunkt ihrer Ebene ist; diese Ebenen sind die gemeinsamen projecirenden Tangentialebenen der drei Flächen $R^{(4)}$; ihre Spuren somit die gemeinschaftlichen neun Tangenten von drei Curven dritter Classe, den Projectionen der Regelflächen $R^{(4)}$ aus einem ihrer Punkte; also der drei Curven, welche durch die Verbindungslinien der Gruppen von F.-Punkten umhüllt werden. Die Gegenecke einer jeden der neun projecirenden Tangentialebenen besitzt eine Schmiegungeebene durchs Centrum, ihre Projection ist also einer der neun Wendepunkte des Curvenbildes C_3 . Auf ihre nähere Bestimmung und gegenseitige Lage kommen wir im Folgenden zurück.

II.

6. Sei jetzt in Taf. II unter Voraussetzung derselben Disposition die Flächengruppe mit dem projecirenden Quadrupel der F gegeben, deren Tangenten sich in einem Punkte T der C_3 begegnen und mit den drei weitem Punkten T als den Diagonalknoten des Vierecks der F , sowie das Quadrupel der Punkte N . Die Verbindung jedes der vier Quadrupel M, N, P, Q mit sich selbst, d. h. die vier Tangenten in den Punkten desselben und die drei Diagonalenpaare liefern vier Mal dieselbe Gruppe von vier Flächen, in der Projection demnach vier Mal die Punkte F .

Wir können aber auch die verschiedenen Quadrupel unter einander verbinden, und führen dies zunächst im Bilde mit den beiden reellen M und N derselben aus.

Wir wissen bereits, dass wir dadurch auf ein neues Quadrupel geführt werden, dessen Punkte mit F_1 bezeichnet seien. Betrachten wir jetzt eine Combination eines Punktes F mit einem Punkte F_1 auf dem unendlichen Aste, so kann der (in Taf. II stärker hervorgehobene) Linienzug $MNNM$ des Ovals in Verbindung mit den Tangenten im Anfangs- und Endpunkte M als ein degenerirtes Polygon von acht Seiten und Ecken, mit drei Doppelseiten und vier Paaren zusammenfallender Ecken, angesehen werden. Fassen wir also den Doppelstrahl FN und das Tangentenpaar FM für jeden Curvenast als zwei Gruppen einer Strahleninvolution vierter Ordnung am Punkte F , die resp. Verbindungslinien MN durch F_1 für Oval und unendlichen Ast als zwei paarweise zu Doppelstrahlen vereinigte Gruppen einer analogen Involution an F_1 auf, construiren wir sodann in jeder Involution die dem gemeinsamen Scheitelstrahl FF_1 entsprechende Gruppe, so entsteht aus einer projectivischen Verbindung beider Involutionen, wenn die beiden ersten Gruppen, welche zusammen je ein degenerirtes Polygon bilden, sowie die beiden zuletzt construirten sich entsprechen, eine Curve von der Ordnung sieben, mit dreifachen Punkten in F und F_1 . Aber wir bemerken aus der besondern Art der beiden bestimmenden Gruppen der Involutionen vierter Ordnung, dass jede Gruppe derselben sich aus zwei Paaren einer quadratischen Involution zusammensetzt, welche an jedem Punkte der C_3 für den Vierschluss auftreten.

Aus diesem Umstande folgt, dass das Erzeugniss zerfällt in eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in den Scheiteln F und F_1 , und in eine Curve dritter Ordnung, welche einfach durch diese hindurchgeht. Zwei entsprechende Gruppen der Strahleninvolutionen begegnen sich in sechzehn Punkten, welche in Gruppen zu acht auf der einen und andern Curve liegen, so dass für beide derselben ein geschlossenes Polygon von acht Ecken und Seiten entsteht, diese vier Mal paarweise in Strahlen durch die Punkte F und F_1 gelegen und jene zwei

Mal zu vierten durch diese gehend, so dass für jede Seite die beiden auf der C_3 gelegenen Schnittpunkte von Strahlen verschiedener Paare der quadratischen Involution herausgeschnitten werden, weil sonst nothwendig Polygone von vier Seiten auftreten müssten.

Die so entstehende Curve dritter Ordnung hat mit der vorliegenden zwei Punkte M und ihre Tangenten, die Punkte N sowie F und F_1 gemeinsam, muss also wieder mit ihr identisch sein. Zur Gruppe, welche durch die Verbindungslinie FF_1 bestimmt ist, gehört in der Involution an F die Tangente der C_3 in diesem Punkte und somit auch der entsprechende Strahl zu diesem in der quadratischen Involution, d. h. der Strahl nach dem andern Punkte F des unendlichen Astes. Zu der entsprechenden Gruppe an F_1 gehört ebenfalls die Tangente der Curve, und weil die Tangente in F diese nicht in einem Punkte der C_3 treffen kann, so muss der Strahl nach dem Punkte F der Tangente von F_1 in einem Punkte der C_3 begegnen, also in dem bekannten Punkte T des unendlichen Astes. Als Bildpunkte eines Quadrupels gehen aber die Tangenten aller vier Punkte F_1 nach T und ebenso schneiden sich die Seiten ihres Vierecks paarweise in den drei andern T (Art. 2), so dass die Punkte F_1 aus dem zweiten Punkte T des unendlichen Astes genau so hervorgegangen sind, wie die Punkte F aus dem ersten Punkte T :

Der Tangentialpunkt der F_1 ist somit Schnittpunkt zweier Verbindungsgeraden von Punkten F und der Tangentialpunkt der F Schnittpunkt zweier Verbindungslinien von Punkten F_1 , somit die Bedingung des Achtschlusses für jede Combination eines Punktes F mit einem Punkte F_1 erfüllt.

Bis jetzt haben wir nur die beiden reellen Quadrupel M und N betrachtet, mit den beiden Punkten F des unendlichen Astes als Tangentialpunkten resp. Die beiden weitem Punkte F des Ovals sind die Tangentialpunkte der nicht reellen Quadrupel P und Q , und weil die Verbindungslinie dieser beiden F durch den Tangentialpunkt T der Gruppe F_1 geht, so begegnen sich auch die Verbindungslinien der Quadrupel P und

Q in der Gruppe der Punkte F_1 . Die paarweise Combination der Quadrupel, wie MN und PQ , MP und NQ , MQ und NP führen somit zu drei neuen Quadrupeln von Punkten F_1, F_2, F_3 resp., für welche die Punkte T die Tangentialpunkte sind. Sie bilden mit der Gruppe der F ein geschlossenes Element einer Punktinvolution sechszehnter Ordnung derart, dass je zwei Punkte aus verschiedenen Gruppen zu vier F.-Punkte sind für eine unendliche Folge Steiner'scher Achtseite.

Man kann aber in Taf. II den Ausgangspunkt M des degenerirten Polygons auf dem Oval auch mit dem zweiten Punkte N auf diesem verbinden, erhält als Schnittpunkt einen zweiten Punkt der Gruppe F_1 und kann mit diesem als zweitem F.-Punkt das Polygon vollenden, ohne dass die Seiten durch F sich ändern; d. h. jeder Punkt lässt sich mit einem Paar von F.-Punkten für den Achtschluss combiniren, so dass seine Strahleninvolution für beide dieselbe bleibt.

Weil die vier Gruppen F_i aus den T so entstanden, wie die M, N, P, Q aus den vier Punkten F , so besitzen auch zwei Punkte M und N die Eigenschaft von F.-Punkten, wie die Figur ohne Zuziehung weiterer Hülfslinien bestätigt.

Den vier Gruppen von Punkten F_i entsprechen im Raume vier Quadrupel von Flächen der Vierer-Involution, ein Element einer Flächeninvolution sechszehnter Ordnung, deren Regelschaaren sich zu geschlossenen Steiner'schen Sekantenpolygonen von acht Seiten zusammenfügen. Da die projecirende Gruppe der Punkte F_i denselben Zusammenhang aufweist, wie die Gruppe der vier Quadrupel M, N, P, Q , so folgt daraus, dass die Flächeninvolution wieder auf doppelte Weise entsteht, durch Verbindung der vier B.-Quadrupel aller Elemente der Viererinvolution mit einem beliebigen Punkte der Curve R_4 und durch Verbindung aller ihrer Punkte mit einer einzigen solchen Gruppe, und es ist klar, dass darin dasselbe Gesetz der Ableitung aller Gruppen der Punkt-Involution sechszehnter Ordnung aus einer, sowie derselbe Zusammenhang zwischen drei Gruppen P, P' und F für das Bild fortbestehen, wie er für die Viererinvolution in Art. 3 ausgesprochen worden ist.

Drei solche Gruppen sind im Bilde aus drei Vierergruppen abgeleitet, deren Tangentialpunkte in gerader Linie liegen. Die Ecken jedes Achtseits für ein Paar von F.-Punkten F sind vier Paare von Punkten, die vier verschiedenen Vierergruppen, und zu vier den Gruppen P und P' angehören. Zu jedem Achtseit giebt es drei andere, deren Ecken zusammen die beiden Gruppen P und P' erfüllen, welche für jeden der Punkte F perspectivisch liegen, so dass für jedes Polygon die vier Ecken gerader Zahl zur Gruppe P , die vier ungerader Zahl zur Gruppe P' gehören. Die Involutionen vierter Ordnung am Punkte F sind entstanden, indem für jede der drei quadratischen Involutionen dem Tangentenpaar das eine oder andere Doppelement dieser Involution als zweites Paar zugeordnet wurde. Diese Strahlen gehen nach den reellen einer Gruppe von sechszehn Punkten, deren Vierergruppen somit durch die Einordnung ihrer Elemente in Paare einer der quadratischen Involutionen selbst involutorisch gepaart werden, so dass ein Strahlenpaar aus der einen mit einem der beiden aus der zweiten Gruppe sich zu einer vierstrahligen Gruppe zusammensetzt. Die Anzahl der verschiedenen Involutionen vierter Ordnung am Punkte F ist somit sechs; jede sechszehnpunktige Gruppe liefert vier solcher Gruppen für jede Involution.

7. Die Verbindungslinien der drei Paare von B.-Quadrupeln einer Flächengruppe des Vierschlusses liefern die drei ergänzenden Gruppen eines Flächenelementes G des Sechszehnschlusses, und da diese vier Vierergruppen G_i mit den resp. B.-Quadrupeln $(MNPQ)_i$ sich untereinander gleichartig verhalten, so müssen irgend drei Gruppen G_i aus der vierten auf dieselbe Weise entstanden sein. Jede Gruppe G_i enthält also 32 Gerade, welche zwei Punkte aus verschiedenen Quadrupeln einer andern Gruppe G_i verbinden, ohne Linien g zu sein, so dass auf jeder Fläche 24 liegen. Nun lässt sich jede Fläche mit zwölf andern combiniren, welche paarweise dieselbe, also sechs verschiedene Involutionen ihrer Regelschaaren bestimmen, welche zu Folge ihrer Zusammensetzung aus Paaren einer quadratischen Involution je ein Paar von Linien g zu

Doppelementen besitzen; und weil die 24 übrigen Doppelemente nothwendig zu Erzeugenden der andern Fläche führen müssen, welche Tangenten der R_4 sind, so können sie nur die obigen 24 Verbindungslinien auf der Fläche sein.

Für das durch die Centrumstangente bestimmte Hyperboloid H^c und dessen Regelschaar, welche diese schneidet, ergibt die Construction der Doppelemente der sechs Involutionsen die projecirenden Tangentialebenen an die sich selbst entsprechenden in Paaren vereinigter Achtschlussflächen $V^{(8)}$. Ihre Anzahl ist somit 24 und wird durch die sechs Vierecksflächen, welche nothwendig Doppelemente der Involution sechszehnter Ordnung sind, auf die Anzahl von 30 gebracht.

Die sechs Involutionsen am Punkte S_i^c in Taf. II sind leicht durch zwei Gruppen zu bestimmen; eine solche besteht nämlich jedesmal aus dem Bilde einer Linie g und den Tangenten in zwei Punkten M_i' . Wir haben somit um jeden der drei Pole P_i in Bezug auf den Spurkreis S^c drei quadratische Involutionsen; für jeden Pol ist zwei Mal eine Tangente an die Spur dieses Kreises in Verbindung mit einer Geraden nach zwei Durchstosspunkten S von Tangenten in Punkten M_i' je ein Paar. Man bemerkt, dass eine der Involutionsen an jedem Pole P_i auf zwei Paare von Flächen $V^{(4)}$ führen muss; die beiden andern ergeben durch die Schnittpunkte ihrer Doppelstrahlen mit dem Kreise S^c drei Mal vier Paare von Spuren $s_v^{(8)}$ projecirender Tangentialebenen an die Flächen $V^{(8)}$; diese treten somit als sechs Vierergruppen auf. Die beiden Involutionsen an P_1 führen dabei auf vier hyperbolische und vier nicht reelle Flächen $V^{(8)}$; für den Pol P_2 sind beide Involutionsen nicht reell, da ein reelles mit je einem nicht reellen Element zu combiniren ist: wir erhalten acht weitere imaginäre Flächen $V^{(8)}$; die Involutionsen an P_3 endlich führen zu vier reellen elliptischen und vier nicht reellen Achtschlussflächen.

Die 120 Verbindungslinien zwischen zwei reellen achtpunktigen Gruppen MM^* und NN^* setzen sich zusammen aus 32 Kegelerzeugenden MM^* , NN^* ; 24 Linien g , wie MM , NN ; 32 Seiten geschlossener Vierseite NM^* , N^*M des hy-

perbolischen Paares $V^{(4)}$ und 32 Geraden NM , N^*M^* , welche sich zu geschlossenen Vierseiten der R_4 zusammensetzen, und die Projectionen der vorigen auf die Raumcurve aus den Ecken M_i sind. Die Gesammtheit dieser Vierseite erfüllt daher zwei Regelflächen $R_1^{(8)}$, welche die Raumcurve zur Doppelcurve besitzen; jene Vierseite bestimmen, mit den Kegelspitzen verbunden, die doppeltumschriebenen Developpablen dieser Flächen: als Umrisskegel der einen Fläche $V^{(4)}$ aus M_2 und M_3 , als Umrisskegel der andern $V^{(4)}$ aus M_1 und M_2 für die eine, und umgekehrt für die andere Regelfläche. Daraus folgt, dass jede Fläche des Büschels acht Erzeugende mit jeder gemein hat, dass sie somit von der achten Ordnung sind.

In der That gehören ihre aus der Verbindung reeller Quadrupel entstehenden Erzeugenden zu acht je zweien, die aus der Verbindung der nicht reellen Quadrupel PP^* , QQ^* entstehenden zu acht den beiden andern Flächen einer Vierergruppe an. Die Regelflächen $R_1^{(8)}$ treten also in Paaren mit denjenigen der Flächen $V^{(4)}$ auf, und können aus diesen durch Projection aus den Tetraederecken direct abgeleitet werden; ausser der Doppelcurve R_4 besitzen sie noch in jeder Tetraederebene P_i eine unicursale Doppelcurve vierter Ordnung und sechster Classe mit Doppelinflexionsknoten in den Punkten M_i .¹⁾ Ihre Projectionen bilden die sechs Curven sechster Classe, welche von den Verbindungslinien der sechzehn Punkte F_i jeder Gruppe umhüllt werden; die vier aus dem Punkte S_i^c an jede gehenden Tangenten sind die bereits construirten Spuren $s_i^{(8)}$.

Die vier Diagonalen jedes Achtseits auf den Flächen $V^{(8)}$ einer Vierergruppe schneiden wieder dasselbe Gegenkantenpaar im Tetraeder, und bestimmen damit an diesen zwei biquadratische Ebeneninvolutionen $\mathfrak{P}_1^{(4)}$ und $\mathfrak{P}_2^{(4)}$, die sich aus Paaren der quadratischen Polarinvolutionen $\mathfrak{P}_i^{(2)}$ zusammensetzen. Aus jeder Vierergruppe von Flächen $V^{(8)}$ geht ein solches Involutionenpaar hervor, mittelst dessen man zu einem Qua-

1) Man vergl.: Ameseder, Sitzb. Aprilheft 1883 p. 26 und die dort bemerkte Literaturnotiz.

drupel M die fehlenden fünfzehn construirt, zu denen man auch von den Punkten M^* aus durch Construction der geschlossenen Achtseite auf den Flächen $V^{(8)}$ gelangt.

Die sechszehn Punkte F_i lassen 96 Combinationen zu zweien zu; aus jeder entspringt nebst unserer Curve dritter Ordnung eine solche vierter Ordnung C_4 mit Doppelpunkten in den F -Punkten; sie sind für ein Paar von Punkten $F_v^{(8)}$ Bilder von Raumcurven R_4' der Flächen $V^{(8)}$, welche noch durch die Regelschaarinvolutionen auf diesen erzeugt werden. Durch jedes der sechszehn B.-Quadrupel gehen zwölf Curven C_4 ; die vier Gruppen zu vier, in welche sich die B.-Quadrupel theilen, enthalten in den beiden ersten zwei reelle und zwei nicht reelle, in den beiden andern keine reellen Vierergruppen. Durch jede reelle Gruppe gehen vier reelle C_4 ; von diesen enthalten je zwei ein weiteres reelles, zwei ein weiteres nicht reelles Quadrupel.

8. Verbinden wir jetzt die Gruppen von je vier Quadrupeln $(MNPQ)_i$ mit verschiedenen Indices untereinander, so wissen wir, dass aus jeder solchen Verbindung eine neue Gruppe von sechszehn Punkten des Curvenbildes entsteht. Betrachten wir etwa die beiden reellen Quadrupelpaare MN und M_1N_1 mit den Tangentialpunktpaaren F und F_1 , so können wir analog wie in Taf. II mit der Tangente in einem Punkte M auf dem Oval und unpaaren Ast beginnend und schliessend, den Linienzug $MN_1M_1NNM_1N_1M$ als degenerirtes Polygon mit sieben Doppelseiten und acht Doppelecken auffassen.

Man erkennt unmittelbar wieder, dass die Gruppen der an den Scheiteln entstehenden Strahleninvolutionen achter Ordnung sich aus zwei Gruppen der Involution vierter Ordnung an diesem Punkte zusammensetzen, nämlich jedes Mal aus einem Paar von Tangenten und drei von den sechs Doppelpunkten der Involution vierter Ordnung am Punkte F . Der Tangente speciell im neuen Scheitel entsprechen in der andern Involution am Punkte F zwei Gruppen von vier Strahlen, aber je nur ein Strahl aus einer solchen begegnet ihr in einem Punkte der C_3 . Derjenige Strahl nun, welcher sie in ihrem dritten Schnittpunkte mit der Curve trifft, gehört

nothwendig zur Gruppe derjenigen vier, welche die Verbindungslinie der beiden Scheitel nicht enthält, zu welcher somit die Tangente in F , sowie der Strahl nach dem zweiten Punkte F des unendlichen Astes und die Strahlen nach zwei Punkten F_1 gehören. Einer dieser beiden letztern Strahlen muss der Tangente auf der C_3 begegnen und jeder Punkt einer der drei neuen Gruppen, der mit F ein Paar von F.-Punkten für den Sechszehnschluss bildet, ist somit bloss an die Bedingung geknüpft, den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie eines Punktes F mit einem Punkte F_1 zum Tangentialpunkte auf der C_3 zu haben, d. h. ihre Gesammtheit wird gebildet durch die drei Gruppen von je sechszehn Punkten, welche die drei Schnittpunktgruppen T_i sämtlicher Verbindungslinien der sechszehn Punkte F und F_i auf der C_3 zu Tangentialgruppen haben. Weil dabei die Gruppen T_i aus paarweisen Combinationen der vier Gruppen F und F_i entstehen, so gehen die drei neuen Gruppen F ebenfalls aus der paarweisen Combination der vier Gruppen $(MNPQ)_i$ hervor.

Im Raume führen diese Verbindungslinien zu drei neuen Flächengruppen, sie bilden mit der ersten das Element einer Flächeninvolution von der Ordnung 64, für Steiner'sche Secantenpolygone von sechszehn Seiten. Die Gruppe der projectirenden Strahlen hat dabei denselben Zusammenhang, wie diejenige der B.-Quadrupel; wir schliessen daraus die doppelte Entstehungsart der Flächeninvolution und die Clebsch'schen Sätze wie in Art. 3.

Jede Fläche lässt sich mit 48 andern combiniren, welche auf ihr zwölf verschiedene Involutionen ihrer Regelschaaren erzeugen; von den Doppelementen derselben sind $12 \cdot 6$ Doppелеlemente der biquadratischen Involution; es bleiben als eigentliche solche 96 übrig, die 96 Verbindungslinien zwischen den Berührungspunkten der Tangenten derjenigen drei Gruppen von sechszehn Flächen, zu welchen die betrachtete nicht gehört. Es giebt demnach auch 96 sich selbst entsprechende Flächen $V^{(16)}$ mit je drei weitem Raumcurven R_4' als Erzeugniss ihrer Regelschaarinvolutionen. Sie setzen sich zusammen aus sechszehn hyper-

bolischen, sechszehn reellen elliptischen und 64 nicht reellen Flächen. Auf ihren Zusammenhang mit den Flächen $V^{(4)}$ und $V^{(8)}$ kommen wir zurück.

Die Projectionen aller auf den Flächen $V^{(8)}$ gelegenen Polygone aus den Ecken M_i auf die Raumcurve führen auf 24 neue Regelflächen $R_2^{(8)}$, welche die $2 \cdot 96$ Doppelstrahlen jeder Fläche in beiden Schaaren mit dieser zu acht gemein haben. Das Auftreten von Polarinvolutionen $\mathfrak{P}_i^{(8)}$ und die Ableitung zusammengehöriger Punktegruppen von 64 aus solchen von vier oder sechszehn Punkten hängt damit zusammen.

9. Das bis dahin zur Anwendung gekommene Verfahren lässt sich offenbar beliebig oft wiederholen. Durch Construction der B.-Quadrupel und ihrer Verbindungslinien geht aus jeder Flächeninvolution diejenige nächst höherer Ordnung hervor, auf welche dieselbe Erweiterung wieder angewendet werden kann. Diese Constructions für das Curvenbild ausgesprochen, ergeben für die Involutionen von F.-Punkten auf der Curve dritter Ordnung folgenden Zusammenhang:

Wir gehen aus von einer Gruppe von vier Punkten F des Vierschlusses; die Tangenten aus einem dieser Punkte bestimmen auf der C_3 vier Berührungspunkte B vom selben Zusammenhang wie die F : ihre Verbindungslinien gehen paarweise durch die drei Ergänzungspunkte F' , welche selbst den gemeinschaftlichen Tangentialpunkt T besitzen. Die Tangenten aus diesen Ergänzungspunkten F' bestimmen drei weitere Gruppen B von Berührungspunkten; sie bilden als Ergänzungsgruppen zur Gruppe B mit dieser eine sechszehnpunktige Gruppe B_1 , welche in Bezug auf ihre Untergruppen B denselben Zusammenhang aufweist, wie die Punkte F ; d. h. mit Verbindungslinien der Gruppen B , welche in paarweiser Combination zu drei neuen Gruppen F führen, den Ergänzungsgruppen der ersten zu einer sechszehnpunktigen Gruppe F_1 von der Art der Gruppe B_1 . Die Gruppe F_1 besitzt die Gruppe T zur Tangentialgruppe und zwei Punkte aus verschiedenen Vierergruppen in F_1 sind F.-Punkte für den Achtschluss. Mit den Tangenten aus den Ergänzungsgruppen F' fügen wir zur Gruppe B_1 drei neue solche einer Gruppe B_2

hinzu; die Verbindungslinien innerhalb der Gruppe B_2 führen zu den Ergänzungsgruppen F_1 des Sechszehnschlusses u. s. f.

Da die Gruppe der B von derselben Art ist, wie diejenige der F , die Gruppe der B_1 von derselben Art wie diejenige der F_1 u. s. f., weil ferner T der Tangentialpunkt der Gruppe F , diese Gruppe die Tangentialgruppe der Gruppe B_1 ; F_1 die Tangentialgruppe der Gruppe B_2 ist, so folgt:

Aus der Gruppe des Vierschlusses entsteht diejenige des Achtschlusses durch Tangentenziehen als Gruppe der Berührungspunkte; durch dieselbe Operation aus dieser die Gruppe des Sechszehnschlusses u. s. f., d. h. die Ordnung jeder folgenden Involution ist durch Multiplication mit 4 aus derjenigen der vorhergehenden ableitbar: somit die Involution für den $2n = 2 \cdot 2^k$ -Schluss von der Ordnung $2^{2k} = n^2$.

Die obige Darstellung giebt die Entwicklung des Involutionselementes aller Involutionen von einem bestimmten Anfangspunkte aus durch Zufügen von je drei Ergänzungselementen derselben Art zu einem Element der folgenden Involution. Sie enthält den Steiner'schen Fundamentalsatz in der Form, dass die durch die Verbindungslinien einer Gruppe von F.-Punkten abgeleiteten drei Untergruppen die Tangentialgruppen ihrer Ergänzungsgruppen sind; seine Begründung liegt in dem organischen Aufbau der die Curve C_3 als Theil erzeugenden Strahleninvolutionen aus Gruppen der jedesmal vorhergehenden Involution, welcher bei beliebig oft wiederholter Fortsetzung des Verfahrens fortbestehen bleibt.

Lässt man die Entwicklung der Elemente gleichzeitig von drei Punkten T einer Geraden ausgehen, so entstehen aus ihnen drei Gruppen P , P' und F von je 2^{2k} Punkten, von denen jede die Schnittpunktgruppe der Verbindungslinien zwischen den beiden andern ist, derart, dass diese Verbindungslinien sich für jedes Paar von F.-Punkten der dritten Gruppe zu 2^k Steiner'schen Polygonen von $2 \cdot 2^k$ Seiten zusammenfügen, so dass die geraden Ecken als die Punkte der einen und die ungeraden als Punkte der andern Gruppe er-

scheinen. Dadurch entstehen an jedem Punkte F aus jeder solchen Punktegruppe 2^k Gruppen derselben Strahleninvolution von der Ordnung 2^k , über deren Anzahl und Zusammensetzung sich folgende Uebersicht aufstellen lässt, wenn man jetzt an Stelle der degenerirten Polygone, wie früher, allgemeine setzt:

An jedem Punkte F existiren drei quadratische Strahleninvolutionen, deren Elemente nach den je drei Paaren von Punkten gehen, in welche sich die vier Punkte jeder Vierergruppe ordnen lassen. Vier derartige vierstrahlige Gruppen setzen sich zu einer Gruppe von sechszehn Strahlen zusammen. Ordnet man alle Elemente einer solchen in Paare einer der drei quadratischen Involutionen, so wird dadurch jeder Vierergruppe eine zweite zugeordnet; ein Paar der ersten bildet mit jedem der beiden Paare der zweiten Gruppe ein Element der Involution vierter Ordnung. Die Zahl der verschiedenen Strahleninvolutionen vierter Ordnung am Punkte F ist somit sechs, und jede derselben ist durch vier Gruppen bestimmt.

Ergänzt man im Weiteren die 16 Strahlen durch drei weitere Gruppen zu 64, und ordnet man ihre Elemente in Gruppen einer der sechs Involutionen vierter Ordnung, so ist damit zugleich die paarweise Zuordnung der sechszehnpunktigen Gruppen selbst vollzogen und zwei vierstrahlige Gruppen aus zwei solchen treten zu einem Elemente der Strahleninvolution achter Ordnung am Punkte F zusammen, so dass die Anzahl der verschiedenen Involutionen zwölf ist.

Offenbar verdoppelt sich bei fortschreitender Entwicklung die Anzahl der auftretenden Involutionen, so dass für die Ordnung 2^{2k} die Zahl der verschiedenen Strahleninvolutionen $3 \cdot 2^{k-1}$ und jede durch 2^k Gruppen bestimmt ist. Jeder Punkt kann mit $(2^2 - 1) 2^{2(k-1)}$ andern combinirt werden, von denen je 2^{k-1} am Punkte F dieselbe Strahleninvolution bestimmen; mit ebenso vielen Flächen eine bestimmte Fläche im Büschel; die doppelte Anzahl ist die Zahl der Doppelemente ihrer Regelschaareninvolutionen und somit $(2^2 - 1) 2^{2k-1}$ die Zahl der eigentlichen $2n$ -Schlussflächen $V^{(2n)}$.

Wir erweisen die Richtigkeit dieser Anzahlenbestimmung

mit Hinweis auf den Zusammenhang mit andern noch durch directe Construction der Flächen $V^{(2n)}$. Wenn insbesondere eine der obigen drei Gruppen den Punkt S_t^c enthält, so giebt es aus dem zugehörigen Punkte T drei Tangenten an die C_3 , denen Gruppen P entsprechen, die mit P' zusammenfallen, wenn ihre Berührungspunkte als Punkte T genommen werden. Es gehen somit $3 \cdot 2^{2k-1}$ Gerade durch den Punkt S_t^c , welche zwei Punkte aus derselben Gruppe P verbinden; sie sind die Spuren der projicirenden Tangentialebenen an die Flächen $V^{(2n)}$.

Verlegt man im Raume das Centrum an einen Scheitel der R_4 , etwa einen in der Ebene P_4 gelegenen, so gehen die projicirenden Tangentialebenen an jede Vierergruppe nach den Erzeugenden des Kegels aus M_4 , welche durch ein Paar der Ebeneninvolution einer der Tetraederkanten, etwa $M_1 M_4$, herausgeschnitten werden. Man sieht, dass dabei auch die elliptischen Flächen sich zu Vierergruppen zusammensetzen. Die drei Paare von Flächen $V^{(4)}$ entstehen durch die Doppelebenen P_2 und P_3 der Involution und durch das Paar von Tangentialebenen an den Kegel aus M_4 , in Uebereinstimmung mit dem frühern Resultate, dass die $V^{(4)}$ die Verbindungsgeraden der Scheitel der R_4 enthalten.

Die Tangentialebenen durch $M_1 M_4$ an jede Vierergruppe bestimmen im Weiteren durch die sechszehn Erzeugenden, die sie aus dem Kegel an M_4 schneiden, die projicirenden Tangentialebenen der Involution sechszehnter Ordnung; speciell die Tangentialebenen der 24 Flächen $V^{(8)}$ durch die sechs Paare von Tangentialebenen an die Flächen $V^{(4)}$; die Tangentialebenen durch $M_1 M_4$ an die Flächen $V^{(8)}$ bestimmen die projicirenden Tangentialebenen der 96 Flächen $V^{(16)}$ u. s. f., also eine Ableitung nicht nur der Involutionen, sondern auch ihrer Doppelemente aus einander, deren Anzahl sich offenbar fortlaufend mit 4 multiplicirt.

Dass mit jeder Vierergruppe von Flächen $V^{(2n)}$ zwei Involutionen $\mathfrak{P}_i^{(n)}$ und vier Regelflächen $R_k^{(8)}$ achter Ordnung auftreten, sei hier nur erwähnt; über ihre Bedeutung auch für die Projection kann nach dem Früheren kein Zweifel mehr bestehen.

III.

10. Die bisherige Untersuchung bezog sich auf den Fall der zweitheiligen Raumcurve R_4 mit vier reellen doppelt projectirenden Kegeln; es bleibt übrig, sie auf die Fälle der Durchdringung mit nur zwei oder gar keiner reellen Kegelfläche, sowie auf die Curve mit Doppelpunkt und die Degenerationsformen auszudehnen.

Die Durchdringung mit vier nicht reellen Kegeln zunächst kann auf den besprochenen Fall zurückgeführt werden durch den Nachweis, dass ein und dieselbe vorgelegte Curve C_3 aufgefasst werden kann als Bild der Grundcurve eines Flächenbüschels sowohl mit vier reellen, als mit vier nicht reellen Kegelflächen. Auch im letztern Falle ist die Raumcurve zweitheilig; alle Flächen des Büschels verhalten sich ihr gegenüber gleichartig, d. h. alle sind einfache Hyperboloide, enthalten je vier reelle Tangenten der einen, und vier nicht reelle Tangenten der andern Schaar. Im Gegensatze zum vorhergehenden Falle aber verhalten sich die beiden Regelschaaren jeder Fläche jetzt ungleichartig; die eine mit reellen Tangenten verbindet reelle oder conjugirt imaginäre Punktepaare je desselben Astes, die andere Punkte des einen Astes mit Punkten des andern. Jede Ebene des Raumes trifft demnach jeden der Aeste entweder in einem stets reellen, oder in drei Punkten, wovon zwei conjugirt imaginär sein können, nie aber jeden Ast in zwei Punkten.

Die R_4 besteht also in diesem Falle aus zwei sich stets mit einem reellen Punkte ins Unendliche erstreckenden Aesten; der eine derselben wird sich bei einer Centralprojection aus einem Punkte desselben als Oval, der andere als unpaarer Ast abbilden; der Durchstosspunkt S_c der Centrumstangente liegt also jetzt auf dem Ovale.

Die Spurkreise der sich selbst entsprechenden Hyperboloide in Taf. I ergaben sich als diejenigen Kreise $V^{(4)}$, welche paarweise je zwei Punkte $F_v^{(4)}$ eines Quadrupels enthielten. Wählen wir nun in Taf. II das Quadrupel der Punkte M , und ordnen wir je einem Punkte M des unendlichen Astes einen

Punkt M des Ovals zu, betrachten wir dann den Punkt F der Verbindungslinien der Paare als Durchstosspunkt $S_i^{c_1}$ einer neuen Durchdringung, so werden irgend zwei Kreise durch diese Punktepaare mit einem gemeinsamen Punkte der C_3 auch den weitem Schnittpunkt mit dieser gemeinschaftlich haben. Da die M F -Punkte für den Vierschluss sind, so werden die quadratischen Involutionen an ihnen, auf den Kreis durch ihren Scheitel übertragen, je zwei Punkte P_1 auf einem Kreise K_1 und P_2 auf einem Kreise K_2 des neuen Büschels mit der Centrale c_1 als Erzeugniss projectivischer Sehnenbüschel bestimmen.

Wir können demnach jene Kreise durch M als Spurkreise $V_1^{(4)}$ und $V_2^{(4)}$ zweier sich selbst entsprechender Flächen in der Viererinvolution eines neuen Flächenbüschels auffassen, mit der C_3 als Bild einer neuen Grundcurve, aus einem neuen Centrum in ihr und mit vier nicht reellen Kegeln, weil die Bilder ihrer Spitzen M_i' als Berührungspunkte der Tangenten aus $S_i^{c_1}$ nicht reell sein können. Der Punkt $S_i^{c_1}$ bestimmt mit den drei weitem F seines Quadrupels die Spurkreise einer Vierergruppe, zu welcher das Hyperboloid H^c der Centrumstangente gehört, und welche jedesmal der C_3 in einem weitem Punkte begegnen, der ein Punkt des Quadrupels T ist.

Die vier Tangenten aus $S_i^{c_1}$ bestimmen an jedem Punkte F eine quadratische Involution, deren Doppelemente als Verbindungslinien jener Berührungspunkte nothwendig die Bilder der drei Paare von Gegenkanten g_i', g_k' des Tetraeders sind, und man bemerkt, dass nur ein einziges dieser Paare g_1, g_2 , dies aber stets reell ist. Andererseits sind die Doppelemente der drei Involutionen an $S_i^{c_1}$ die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Tangenten aus den F , also die Spuren der projectirenden Tangentialebenen der sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(4)}$. Weil zwei Punkte F je vier reelle Tangenten besitzen, so sind zwei Paare dieser Doppelemente nach den Punktepaaren M und N reell; von den sechs Flächen $V^{(4)}$ sind daher vier hyperbolisch, zwei mit den Spuren $V_1^{(4)}$ und $V_2^{(4)}$, und zwei nicht reell.

Für jede Vierergruppe kommen bei zwei Flächen die Regelschaaren mit reellen, bei zweien diejenigen mit nicht

reellen Tangenten zur Verwendung; die Spuren $s_v^{(4)}$ sind die Doppelemente der Regelschaar mit nicht reellen Tangenten und die Bilder der drei Paare von Linien g , von denen also zwei reell und somit auch reell schneidend, und eines nicht reell ist. Die andern zusammengehörenden Regelschaaren zeigen ein analoges Verhalten; bei den Hyperboloiden mit reellen Tangenten treten jetzt die Regelschaaren mit nicht reellen auf, und umgekehrt. Die Bilder dieser Regelschaaren sind die Büschel an den Punkten T , und speciell sind die drei Involutionen am Tangentialpunkte von $S_t^{c_1}$ die Bilder der Regelschaareninvolutionen, welche die Centrumstangente enthalten. Sie sind bestimmt als die drei Combinationen der vier Tangenten nach den F , zwei dieser Involutionen haben reelle Doppelemente — nur das eine Paar ist reell schneidend — als Bilder der drei Paare von Linien g der andern Schaar.

Jedesmal setzen sich zwei Paare solcher zu einem geschlossenen Vierseit zusammen, in der Projection auf Taf. II das reell schneidende nach den Punkten N durch $S_t^{c_1}$ mit dem reellen, aber nicht reell schneidenden aus T zu einem Vierseit $ABA'B'$, mit g'_1, g'_2 als Diagonalenpaar. Dem andern reellen Paare am Punkte $S_t^{c_1}$ entspricht das nicht reelle an T und umgekehrt; also zwei Vierseite mit zwei reellen Seiten und vier nicht reellen Schnittpunkten auf imaginären Linienpaaren g'_i, g'_k durch die entsprechenden Punkte F . Von den zwölf Linien g jedes Hyperboloides sind acht reell, mit drei reellen Quadrupeln auf der Raumcurve, welche die Berührungspunkte der drei mit ihm zu combinirenden Flächen sind, und von welchen zwei oder eines auftreten, je nachdem die Zuordnung auf dem ersten Hyperboloid innerhalb der Schaar mit nicht reellen, oder mit reellen Tangenten begonnen wird.

Von den vier Seiten jedes Vierseits aus Linien g schneiden je nur zwei die Curve reell, so dass von jeder achtpunktigen Gruppe nur ein Quadrupel reell erscheint, mit zwei Punkten des einen und zwei Punkten des andern Astes; die Tangenten in ihnen bestimmen die eine, die Verbindungslinien die drei andern Flächen einer Vierergruppe. Die Regelflächen $R^{(4)}$ der Linien g sind also alle drei reell, aber jede mit nur einem

reellen Mantel und nur die eine mit einem reellen Paare von Doppelgeraden auf diesen.

Die beiden verschiedenen Raumcurven R_4 sind durch ihr gemeinsames Bild eindeutig punktweise auf einander bezogen, und die für die Projection einer Durchdringung mit vier reellen Kegeln abgeleiteten Beziehungen, insbesondere die sämtlichen Steiner'schen Involutionen gehen somit ohne Weiteres auf die neue Durchdringung mit vier imaginären Kegeln über. Alle Realitätsverhältnisse bleiben somit im Bilde beider Durchdringungen dieselben; sie führen aber mit verschiedenen Lagen des Durchstosspunktes S_t^c der Centrumstangente auf dem unendlichen Aste oder auf dem Oval zu verschiedenen Auffassungen und Auslegungen der Raumverhältnisse, so dass der eine Fall durch den andern mit erledigt wird und wir uns damit begnügen können, diese Uebertragung für denjenigen der Viererinvolution ausgeführt zu haben.

11. Zwischen beiden Fällen einer Durchdringung mit vier reellen und nicht reellen Kegelflächen steht derjenige der Eindringung mit zwei reellen und zwei nicht reellen Kegeln. Seien Taf. III Fig. 1 M_1L_1 und M_2L_2 die beiden reellen Kegel mit dem Durchstosspunkte S_{12} der Geraden M_1M_2 oder g_1 als Richtung der Normale zur Centrale c beider Spurkreise, so entsteht als Bild der Eindringung eine eintheilige, circulare Curve dritter Ordnung, wenn die Tangentenpaare der Spurkreise aus S_{12} sich trennen (D. G. Bd. II p. 156 ff.). Die Centrale c ist dann die in der Bildebene liegende Gegenkante g_2' und die auf ihr gelegenen Kegelspitzen M_3 und M_4 sind die Doppelemente der elliptischen Involution AA' , BB' ihrer Schnittpunktpaare mit L_1 und L_2 . Auch diese im Sinne möglichster Vereinfachung angelegte Disposition enthält keinerlei specialisirende Bestimmungen bezüglich der folgenden, für jede eintheilige Curve dritter Ordnung gültigen Betrachtungen.

Jedes Paar der elliptischen Ebeneninvolution an einer der beiden reellen Tetraederkanten trifft die R_4 in vier reellen Punkten der einen und vier nicht reellen der andern Ebene, so dass wieder von jeder achtpunktigen Gruppe nur vier reell sind, jedoch nicht so, dass sie ein Quadrupel bilden. Jede

Gruppe von F.-Punkten für den Vierschluss besteht jetzt aus einem reellen und einem nicht reellen Paare; die Gruppe der vier Punkte M im Bilde speciell aus dem Schnittpunkte der Gegenkanten $g'_1 g'_2$, und dem Punkte S_i^c als dem reellen Paare. Dieses bestimmt die Spurkreise S und S^c der beiden reellen zur Gruppe gehörenden Hyperboloide, und ihre Tangenten auf dem Kreise S^c den einen, ihre Verbindungslinie auf dem Kreise S den zweiten reellen Punkt F ihrer Gruppe. Dabei ist es leicht, aus der Disposition zu erkennen, dass die Pole P der Involutionen an beiden Punkten F im Punkte S_{12} liegen, und für beide Involutionen die Doppelstrahlen somit nach den Schnittpunkten der Spurkreise S und S^c resp. mit der Centrale derselben gehen; so dass aus jedem Punkte der Curve zwei reelle und zwei nicht reelle Tangenten an diese möglich sind.

Wieder sind die Involutionen am Punkte S_i^c bestimmt durch die Tangenten nach den Punkten M_i' , aber nur die Combination der beiden reellen und nicht reellen zu je einem Paare ergibt eine reelle Involution, mit S_{12} als Pol und mit den Geraden aus S_i^c nach den Schnittpunkten des Kreises S^c mit der Centrale, als den einzig reellen Spuren $s_v^{(4)}$ der projicirenden Tangentialebenen an zwei Flächen $V^{(4)}$. Von den sich selbst entsprechenden Flächen sind also zwei reell, die eine hyperbolisch, die andere elliptisch; die eine mit einem reellen Paare von Punkten $F_v^{(4)}$, den Diagonalknoten des Bildvierecks der reellen Scheitel der Curve; die andere mit einem nicht reellen solchen, in Uebereinstimmung mit der Anschauung des einzigen reellen Paares von Linien g des Hyperboloids H^c , welches die Tangente im Centrum trifft. Von den Regelflächen $R^{(4)}$ ist nur die eine reell, mit zwei reellen Mänteln und Doppelgeraden.

Ganz nach Analogie mit dem Falle der zweitheiligen Curve gestaltet sich der Aufbau aller Involutionen für eine Zahl n gleich einer Potenz von 2 aus derjenigen des Vierschlusses. Nach den an dieser bemerkten Realitätsverhältnissen können wir sagen, dass die Zahl der reellen Punkte jeder Gruppe halb so gross ist, wie in der entsprechenden Gruppe auf der zweitheiligen Curve; was ebenso von den sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(2n)}$ gilt; von

den reellen derselben ist die eine Hälfte hyperbolisch, die andere elliptisch.

12. Sind Taf. III Fig. 2 beide Kegelflächen M_1L_1 und M_2L_2 in Berührung, für einen Punkt M_3 , so ist dieser als Schnittpunkt der in der gemeinsamen Tangentialebene gelegenen Erzeugenden ein Doppelpunkt der Curve R_4 und bestimmt im Bilde die Spur L_3 des uneigentlich doppeltprojicirenden Kegels, dessen Spitze er ist. Das Bild der Raumcurve ist demnach eine rationale Curve dritter Ordnung, circular und mit eigentlichem Knoten oder isolirtem Doppelpunkte, je nachdem die gemeinsame Tangentialebene der beiden Kegel dem dritten aus M_3 in reellen oder nicht reellen Erzeugenden begegnet (D. G. Bd. II p. 119). Liegt der Durchstosspunkt S_{12} auf der gemeinsamen Tangente von L_1 und L_2 unendlich fern, und ist M'_1 ein Punkt der zweiten Tangente aus S_{12} an L_2 , so liegt im Raume das Centrum in der Polarebene P_1 , deren Spur die Polare von S_{12} bezüglich L_2 ist, und welche gleichzeitig das Bild der Gegenkante g'_2 durch M'_3 darstellt. Die Ebeneninvolutions an der Kante M_1M_2 ist parabolisch, und eine achtpunktige Gruppe besteht immer aus dem Doppelpunkte, seinen beiden unendlich benachbarten, und aus vier Punkten einer beliebigen Ebene durch M_1M_2 mit einer Spur h durch S_{12} . Diese letztern werden verbunden durch ein Paar von Linien g , den Erzeugenden der einzigen Regelfläche $R^{(4)}$, welche übrig bleibt, mit zwei reellen Mänteln, zwei Doppelgeraden und einem dreifachen Punkte in M_3 .

Jene vier Punkte sind zwei Paare F und F' von F-Punkten für den Vierschluss, deren Tangenten räumlich das eine, und deren Verbindungslinien g das andere Hyperboloid einer Gruppe bestimmen. Jedesmal ist der Kegel aus M_3 als ein Paar von Flächen für jede dieser Gruppen aufzufassen: die Involution des Vierschlusses ist also quadratisch.

Aus jedem Punkte F gehen zwei Tangenten an die C_3 ; die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte N bestimmt den andern Punkt F des Paares und ist das eine Doppelement der quadratischen Strahleninvolution an diesem, dessen anderes stets nach dem Doppelpunkte M'_3 geht, welcher auch das

Paar der Doppelpunkte der Involution auf der Curve selbst darstellt, welche in diesem Falle auftreten.

Für die Involution am Punkte S_i^c folgt, dass der Strahl nach M_3' das eine Doppelement $s_v^{(4)}$ vorstellt, während das andere nach dem zweiten Schnittpunkte der Polare von S_{12} beziehentlich des Kreises S^c geht. Der Kegel $M_3 L_3$ stellt demnach nicht nur zwei Regelflächen $R^{(4)}$, sondern auch eine sich selbst entsprechende Fläche $V^{(4)}$ dar; die andere Fläche $V^{(4)}$ ist elliptisch, wie in Fig. 2, oder hyperbolisch, je nachdem der Doppelpunkt ein eigentlicher Knoten oder ein isolirter Punkt ist. Im ersten Falle sind zwei, im andern vier Scheitel S_i der R_4 reell, welche durch ihre Verbindungsgeraden ein geschlossenes Vierseit der Fläche $V^{(4)}$ geben¹⁾.

Nach der Ableitung aller folgenden F.-Punktgruppen mit der Methode des fortgesetzten Tangenziehens geht die Ordnung jeder Involution durch Multiplication mit 2 aus derjenigen der vorhergehenden hervor, so dass die allgemeine Involution für $2n = 2 \cdot 2^k$ von der Ordnung 2^k ist.

Durch die Tangentialebene der Kante $M_1 M_2$, welche nicht durch M_3 geht, werden aus jeder Fläche $V^{(2m)}$ zwei Flächen $V^{(4m)}$ abgeleitet. Die Anzahl der sich selbst entsprechenden Flächen mit geschlossenen Polygonen von $2 \cdot 2^k$ Seiten ist somit 2^{k-1} , dazu treten die Doppelemente aller Involutionen niedrigerer Ordnung, sowie jedesmal der als Paar zählende Kegel $M_3 L_3$ hinzu. Ausgehend von der Art der Fläche $V^{(4)}$, sind die Realitätsverhältnisse für die Curve mit Knoten wie mit isolirtem Doppelpunkte für alle sich selbst entsprechenden Flächen leicht festzustellen; für den Fall der Disposition in Fig. 2 kann keine dieser Flächen hyperbolisch sein.

Hat die Raumcurve R_4 einen Rückkehrpunkt, so geht von jedem Punkte ihres Curvenbildes nach eine einzige Tangente an dieses; von einer Involution kann also jetzt nicht mehr die Rede sein.

1) Da die Raumcurve R_4 vom Schnittpunkte der Tetraederkante durch M_3 mit der Fläche $V^{(4)}$ als Curve vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten projecirt wird, so folgt daraus, dass wenn alle drei derselben reell sind, nothwendig einer ein isolirter Doppelpunkt ist.

13. a) Haben im Weitem Taf. IV, Fig. 1 beide Kegel die Erzeugende $M_1 M_2$ oder l mit einander gemein, so besteht die Durchdringung nebst dieser Geraden noch aus einer Raumcurve dritter Ordnung R_3 . Die Tangentialebenen längs l an beide Kegelflächen sind die beiden eigentlichen Tetraeder-ebenen; die Punkte $M_1 M_2$ auf l die beiden eigentlichen Ecken; die Gerade l selbst stellt die Vereinigung sämtlicher sechs zusammenfallenden Kanten dar; Punkt- und Ebeneinvolution an ihr für das zweite Paar von Ecken und Ebenen sind unbestimmt (D. G. Bd. II p. 156). Da die Gerade l selbst als Theil der R_4 auftritt, so ist zu erwarten, dass die auf ihr liegenden Paare der Involution der Doppelpunkte M_1 und M_2 bereits für das Problem des Vierschlusses die Bedeutung von F.-Punktpaaren haben werden.

Das Bild der R_3 erscheint nach der Disposition der Fig. 1 als Kreis K' und irgend ein Paar der Ebeneninvolution an l von den Spuren h_1 und h_2 bestimmt auf K' zwei Punkte N , deren Tangenten sich nothwendig auf l' begegnen müssen, und deren Verbindungslinie daher stets durch den Schnittpunkt S der Kreistangenten in M_1' und M_2' geht. Jede Fläche des Büschels besitzt demnach zwei Tangenten mit einer Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte, die Erzeugende desjenigen Hyperboloids $R^{(2)}$ durch die Raumcurve dritter Ordnung ist, das durch die Tangenten derselben in M_1 und M_2 bestimmt ist, und welche mit ihr zur selben Schaar gehören. Der Schnittpunkt der Tangenten in den N und ihre Verbindungslinie bestimmen auf l' ein Paar der schon bekannten Involution der Doppelpunkte M_1' und M_2' , und das Curvenbild entspringt aus der projectivischen Zuordnung der Polarinvolutionen für K' an diesen, also mit einem Doppelemente als gemeinschaftlich entsprechend.

Die Involution des Vierschlusses besteht also sowohl auf der Geraden l als auf der Raumcurve R_3 aus einer quadratischen Involution; mit den gemeinsamen Punkten M_1 und M_2 beider Träger als den Doppelementen.

Die Verbindung irgend eines Paares von Punkten F der Involution auf l mit einem Paare N derjenigen auf der Raum-

curve R_3 liefert ein geschlossenes Vierseit auf zwei Flächen, und zwar für die projectivische Zuordnung derjenigen Schaaren, welche Punkte der Geraden mit Punkten der Raumcurve verbinden; die Verbindung irgend zweier Paare der R_3 giebt dagegen ein Vierseit auf zwei Flächen für diejenigen ihrer Schaaren, zu denen l selbst gehört, also mit zwei reellen Tangenten und mit l als Doppelement, das in beiden Involutionen sich selbst entspricht. Weil für jede Flächengruppe jedes Mal beide Schaaren derselben Art in projectivischer Verbindung stehen, so kann es keine eigentlichen Vierschlussflächen $V^{(4)}$ geben.

In der That kann im Bilde nur für einen Strahl nach M_1' oder M_2' ein Paar von F.-Punkten mit S_t^c in einer geraden Linie liegen, so dass wirklich die beiden Kegelflächen als die einzigen Flächen $V^{(4)}$ anzusehen sind. Das Hyperboloid $R^{(2)}$ mit der Spur S^R durch die Durchstosspunkte S der Tangenten in M_1 und M_2 und der Verbindungsgeraden des Punktpaares N , repräsentirt dabei die einzige auf die zweite Ordnung reducirte Regelfläche $R^{(4)}$ des allgemeinen Falles.

Die Berührungspunkte N_1 der Tangenten aus dem zweiten F.-Punkte F haben eine Verbindungslinie durch den ersten; zwei Punkte N und N_1 sind F.-Punkte für den Achtschluss; ihre Verbindungslinien schneiden sich paarweise auf l' in zwei neuen Punkten F_1 , welche mit den Punkten F ein vierpunktiges Element der Involution vierter Ordnung bilden. Jene geschlossenen Vierseite aus Linien NN_1 sind Bilder von Erzeugenden einer Regelfläche $R^{(4)}$ von der Ordnung vier, mit der Raumcurve R_3 als Doppelcurve und umhüllen einen Kegelschnitt, welcher mit dem Kreise K' in doppelter Berührung ist für l' als Berührungssehne. Die Diagonalen aller Vierseite erfüllen die Polareninvolution am Pole L von l bezüglich des Kreises, und die Schnittpunkte von K' mit l' sind die einzigen Doppelemente beider Punktinvolutionen vierter Ordnung. Ihre Verbindungsgeraden mit S_t^c stellen somit die Spuren $s_v^{(8)}$ der in ein Paar vereinigten projecirenden Tangentialebenen an die uneigentlichen Flächen $V^{(8)}$ vor, die durch die beiden Kegel aus M_1 und M_2 vertreten werden.

Man gelangt auch hier durch Fortsetzung des Verfahrens zu den Involutionen für den allgemeinen Fall von der Ordnung 2^k , mit Sehnengruppe ihrer Elemente, welche 2^{k-2} Kegelschnitte, sämmtlich in doppelter Berührung mit dem Kreise K' für l' als Berührungssehne, umhüllen. Sie sind ihrer Entstehung nach specielle Projectivitäten in der Form Möbius'scher Involutionen¹⁾, mit dem Paare von Schnittpunkten zwischen K' und l' als dem einzigen Paare ihrer Doppelemente, so dass die Flächen $V^{(2n)}$ also durch das Paar der Kegelflächen vertreten werden.

13. b) Aus der doppelten Berührung der beiden Kegelflächen $M_1 L_1$ und $M_2 L_2$ entspringt eine weitere Degenerationsform, eine R_4 mit zwei Doppelpunkten, oder ein Paar von Kegelschnitten.

Auf Taf. IV Fig. 2 ist diese doppelte Berührung dadurch hergestellt, dass beide Leitcurven L_1 und L_2 am Punkte S_{12} der Geraden $M_1 M_2$ dieselbe Polarinvolution (Rechtwinkelinvolution) besitzen. Die beiden gemeinsamen Tangentialebenen sind nicht reell, die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte der Durchdringung also ebenfalls imaginär. Das Tetraeder hat zwei Ecken in M_1 und M_2 mit zwei Gegenebenen, welche sich in der Schnittlinie beider Durchdringungsebenen begegnen. Auf dieser sind die gemeinsamen Schnittpunkte die Doppelpunkte oder Kegelspitzen $M_3 M_4$; ihre Gegenebenen enthalten sie also resp. Irgend ein Paar der Ebeneninvolution an $M_1 M_2$, welche identisch ist mit der gemeinsamen Polarinvolution der zugehörigen Kegelflächen, bestimmt eine achtpunktige Gruppe, von deren Punkten sich vier auf den Kegelschnitt K' und vier auf das Bild p' des andern Kegelschnittes projeciren (D. G. Bd. II. p. 162 f.). Sie theilen sich in zwei Gruppen N und N' , deren Tangenten für diejenigen auf K' sich paarweise in Punkten F auf p' schneiden.

Die Verbindungslinien zweier Punkte N und zweier Punkte N' gehen dabei stets durch ein festes Punktepaar $F_e^{(4)}$ auf K' , in einer Geraden nach dem unendlich fernen Punkt S_i^c von p' , der Spur der durch das Centrum gehenden Tangentialebene der Fläche $V^{(4)}$;

1) Möbius: Leipziger Berichte Bd. VII. pag. 123 f.

welche mit dem Paare der Durchdringungsebenen die Doppelselemente der quadratischen Viererinvolution bildet.

Die Anschauung zeigt, dass sich im Bilde genau der vorhergehende Fall wiederholt, nur dass jetzt der Punkt S_i^c auf der Geraden p' liegt, und daher für die quadratische Involution bereits eine eigentliche Fläche $V^{(4)}$ aufgetreten ist. Die Kegelschnitte der Sehnengruppen führen in diesem Falle durch ihre Tangentenpaare aus S_i^c zu den Spuren der projectirenden Tangentialebenen an wirkliche $2n$ -Schlussflächen, deren Anzahl also 2^{k-1} ist.

Das Ebenenpaar der Durchdringung umfasst auch die Vorstellung der Regelflächen $R^{(4)}$ und $R^{(8)}$ des allgemeinen Falles; auf die Modification der Resultate desselben für noch speciellere Formen des Zerfallens soll nicht mehr eingegangen werden; nach dem Vorausgegangenen sind dieselben leicht allgemein zu übersehen.

14. Aus der Betrachtung der Realitätsverhältnisse bezüglich der sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(4)}$ des Vierchlusses gewinnen wir eine einfache Uebersicht der Erzeugnisse, welche aus der projectivischen Verbindung der quadratischen Involutionen beider Regelschaaren einer Fläche zweiten Grades hervorgehen können. Durch die Natur der Zuordnung ist bereits festgesetzt, dass einem reellen Doppelselement der einen Involution ein reelles oder imaginäres Paar der andern entsprechen kann, dass dagegen einem nicht reellen Doppelselement stets ein nicht reelles Paar der andern Involution entsprechen muss. Ist:

- 1) die Fläche hyperbolisch, so entsteht
 - a) Eine zweitheilige Raumcurve R_4 mit vier reellen doppeltprojectirenden Kegeln, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind, mit jedesmal reellem entsprechendem Paar der andern Involution; oder wenn beide Involutionen elliptisch sind.
 - b) Eine zweitheilige Curve R_4 mit vier nicht reellen Kegeln, wenn die eine Involution hyperbolisch ist, mit reellem entsprechendem Paar in der andern elliptischen Involution.

- c) Eine eintheilige Curve R_4 mit zwei reellen Kegeln, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind, mit je einem reellen und einem nicht reellen entsprechenden Paare der andern Involution.
 - d) Die unicursale Raumcurve R_4 mit isolirtem Doppelpunkt, wenn beide Involutionen hyperbolisch sind, mit je einem Doppelement in beiden als entsprechend und mit reellen entsprechenden Paaren bezüglich der andern Doppelemente.
 - e) Eine Raumcurve dritter Ordnung in Verbindung mit einer reell oder nicht reell schneidenden Bisecante, aus einer parabolischen Involution, mit reellem oder nicht reellem entsprechendem Paar ihrer vereinigten Doppelemente in der andern Involution.
 - f) Ein Paar von Kegelschnitten mit reellen Schnittpunkten und zwei nicht reellen Kegeln, wenn in beiden hyperbolischen Involutionen die Doppelemente sich entsprechen; und mit nicht reellen Schnittpunkten und zwei reellen Kegeln, wenn beide Involutionen sich entsprechende nicht reelle Doppelemente haben.
 - g) Ein Kegelschnitt und ein Linienpaar, wenn beide Involutionen parabolisch sind. Ist
- 2) die Fläche elliptisch, so entstehen durch projectivische Verbindung der Involutionen ihrer nicht reellen Regelschaaren die Fälle (a) und (c), dazu
- h) Eine unicursale Raumcurve R_4 mit eigentlichem Doppelpunkt bei einem entsprechenden Doppelement in beiden Involutionen.
 - i) Ein Paar von Kegelschnitten mit nicht reellen Schnittpunkten und zwei reellen Kegelflächen bei beiden Doppelementen als entsprechend.
-

Die Steiner'schen Involutionen von Fundamentalpunkten des $2n$ -Schlusses für $n = 3^{k_1}$ und $n = 2^{k_2} \cdot 3^{k_1}$.

Die Einfachheit in der Behandlung der Steiner'schen Polygone für alle Fälle, wo n gleich einer Potenz von 2 ist, hat ihren Grund darin, dass unmittelbar mit der Construction der Durchdringungcurve alle Gruppen von Punkten auf ihr gegeben sind, welche in der Projection F.-Punkte für den Vierschluss sein können, und in der einfachen Art der Ableitung von Involutionen Gruppen höherer Ordnung aus diesen. Die Seiten jedes Polygons auf einer sich selbst entsprechenden oder Doppelfläche sind Verbindungsgerade zwischen Punkten zweier Gruppen P und P' der zugehörigen Punktinvolution der Curve, und wenn wir die Construction derselben für den Vierschluss auch ohne die Kenntniss der Flächen $V^{(4)}$ ebenso einfach durchführen konnten, so hängt dies an der Bedeutung des Quadrupels für die Involution und für die Raumcurve. In der Folge haben wir uns zunächst mit dem Steiner'schen Sechsschluss zu beschäftigen, und da die Doppelflächen ein analoges Verhalten ihren Involutionen gegenüber zeigen, welches gestattet, diese besonders einfach zu übersehen: so wird es im Sinne constructiver Vereinfachung liegen, gleich anfangs das Augenmerk auf die sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(6)}$ zu richten, die aus ihren Involutionseigenschaften gegenüber dem Poltetraeder leicht erkannt werden müssen.

IV.

15. Wir führen die Betrachtung an der Durchdringungcurve mit vier reellen Kegeln weiter. Fassen wir, wie zu Anfang des vorigen Abschnittes, ein degenerirtes unter den Steiner'schen Sechsseiten in's Auge, so besteht dieses aus zwei Doppelseiten $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$, die sich in einem Punkte der R_4 schneiden, und aus zwei Tangenten t_1 und t_2 , welche dasselbe schliessen, und mit jenen Seiten paarweise auf derselben Fläche liegen. Projiciren wir das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ aus dem Mittelpunkte M_i eines Kegels zum zweiten Male nach

Punkten A_1', A_2', A_3' der Curve, so schneidet die neue Tangente t_2' die Seite $A_1 A_3$, also sind $A_2' A_3$ und $A_2' A_1$ Erzeugende einer Fläche des Büschels; aus analogen Gründen $A_1' A_2$ und $A_1' A_3$ Erzeugende derselben Fläche. Zieht man jetzt noch $A_3' A_1$ und $A_3' A_2$, so haben wir ein geschlossenes Sechseck von Erzeugenden einer einzigen Fläche, woraus sofort folgt, dass auch die Tangente der dritten Ecke A_3 mit $A_1 A_2$ einer Fläche angehört, so dass die drei Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ sich untereinander analog verhalten.

Wir wollen von drei solchen Punkten A_i sagen, dass sie ein Dreieck bilden, oder Dreieckspunkte sind. Ihre Ebene begegnet der Raumcurve in einem weiteren Punkte S , welcher offenbar der gemeinsame Schnittpunkt der drei Schmiegungsebenen der Curve in den Punkten A_i ist. Wenn somit die Schmiegungsebenen in zwei Punkten der R_4 sich auf dieser begegnen, so geht die Schmiegungsebene im letzten Schnittpunkte der Ebene dieser drei ebenfalls durch diesen Punkt. Die Verbindungsgeraden des Punktes S mit den drei Punkten A_i bestimmen drei Flächen, welche paarweise so combinirt werden können, dass sie vier Mal ein degenerirtes Steiner'sches Sechseck liefern. Die Construction dieser Dreiecke hängt mit der Construction der Sechsschlussflächen $V^{(6)}$ auf's Engste zusammen, und wir wenden uns daher direct zur Bestimmung dieser Flächen.

Auf jeder derselben sind die Regelschaaren in projectivische Involutionen dritter Ordnung geordnet, welche nebst der R_4 noch einen Kegelschnitt erzeugen, der nothwendig ihr Schnitt mit einer Tetraederebene P_i sein muss. Betrachten wir insbesondere eines derjenigen Polygone, welche einen Scheitel der R_4 zur Ecke haben, so muss noch ein zweiter Scheitel der Curve Ecke sein, und das mittlere Seitenpaar aus Linien g bestehen; oder das Polygon ist ein degenerirtes, der zweite Scheitel fällt mit dem ersten zusammen, und das Polygon schliesst sich mit zwei Tangenten der Fläche.

So oft also die achtpunktige Gruppe, welche von den Tangentialebenen in einem Scheitel an die Flächen einer Vierergruppe auf der Curve bestimmt wird, mit einer der

vier Gruppen von acht Berührungspunkten identisch ist, haben wir eine Gruppe von vier Sechsschlussflächen, und wir bemerken bereits, dass diese als Vierergruppen auftreten werden. Das Entsprechen zwischen den achtpunktigen Gruppen auf der R_4 ist ein ein-vierdeutiges, und da für die Gruppen der vier Kegelflächen das Zusammenfallen entsprechender Gruppen evident ist, so haben wir sechszehn Flächen $V^{(6)}$ in vier Gruppen zu vier zu erwarten.

Wir erweisen dies näher durch Construction und benutzen dazu die Disposition der Taf. V für den Fall des Centrums in einem Scheitel S_1 , oder bei bekanntem Wendepunkt M_4' oder J_1 der Curve im Bilde. Da es sich um Ebenenbüschel handelt mit der Tangente im Scheitel S_1 als Axe, so ersetzen wir diese durch ihre Spurenbüschel, und weil im Weiteren die Behandlung mit dem Spurkreise L_1 günstiger ist, als diejenige mit dem Kreise L_4 , so verlegen wir die Construction an einen der vier andern reellen Scheitel S_2 , deren Tangenten Erzeugende des Kegels $M_1 L_1$ sind.

Offenbar genügt es, von den vier Ebenen nach einer achtpunktigen Gruppe jeweilen nur eine zu betrachten, und von den vier Flächen einer Gruppe nur diejenige, die durch sie als Tangentialebene bestimmt ist. An diese gehen dann aus den drei Kanten des Tetraeders durch M_1 drei Paare von Tangentialebenen; durchläuft die Ebene das Büschel um die Scheiteltangente, so beschreiben diese Paare die Involutionen an den Tetraederkanten, diese und jene in projectivischer Zuordnung. Wir haben somit am Durchstosspunkte S auf L_1 , wo die Tangente in S_2 der Bildebene begegnet, ein Büschel von Spuren; um die Durchstosspunkte S_{12}, S_{13}, S_{14} aber je eine dazu projectivische Strahleninvolution.

Die Zuordnung wird bestimmt durch die Tangentialebenen an drei Flächen, etwa der drei Kegel aus M_2, M_3 und M_4 ; wählen wir dazu die Involution am Punkte S_{12} , so ist der Strahl SS_{12} dem Büschel und der Involution gemeinsam und entsprechend; das Erzeugniss somit ein Kegelschnitt K^* mit der zweiten Tangente aus S_{12} an L_2 als Tangente in diesem Punkte. Er geht durch die beiden andern Träger S_{13} und S_{14} der Involu-

tionen mit Tangenten in ihnen nach dem Punkte S , da diese Strahlen im Büschel den Doppelementen in der Involution entsprechen. Der Kegelschnitt K^* ist durch diese drei Punkte nebst Tangenten vollständig bestimmt, und steht mit dem Spurkreise L_1 in der Beziehung, dass jeder der beiden Kegelschnitte unendlich viele Tripel harmonischer Pole des andern enthält. Daraus, und weil der Tangente im Punkte S selbst ein nicht reelles Paar der Involution entspricht, folgt, dass der Kegelschnitt K^* den Kreis L_1 in nur zwei reellen Punkten U_1 und U_2 treffen kann.

Man bemerkt, dass ebenso durch die zweiten Tangenten in den Punkten S_{12} , S_{13} , S_{14} noch drei weitere Kegelschnitte K^* entstehen, entsprechend den Combinationen der Involution an S_{12} mit den Büscheln an den Durchstosspunkten S der Tangenten in den drei weitem Scheiteln S_2 der R_4 ; sie können aber nur zu Schnittpunkten U_i führen, welche mit den schon bekannten auf Strahlen durch die Scheitel S_{ik} liegen, und welche somit zu denselben Punktgruppen auf der Raumcurve führen; jeder der vier Kegelschnitte K^* wird dabei für jede Involution in Verbindung mit einem Büschel dreimal erhalten. Der Punkt U_1 ergiebt eine reelle achtpunktige Gruppe von Punkten K der R_4 , der Punkt U_2 eine nicht reelle, aber mit Punkten paarweise in reellen Ebenen durch den Scheitel S_2 gelegen; die beiden nicht reellen Schnittpunkte führen zu imaginären Punktgruppen und wir schliessen:

Von den vier Vierergruppen der Flächen $V^{(6)}$ bestehen zwei aus hyperbolischen, resp. aus reellen elliptischen und zwei aus nicht reellen Flächen.

Die Tangentialebenen im Centrum an diese Flächen führen zu vier neuen achtpunktigen Gruppen, von denen wir die der reellen Gruppe der K entsprechende mit J bezeichnen wollen. Das Centrum ist ein Scheitel S_1 , und weil die Geraden S_1J und S_2K sich als Erzeugende auf $V^{(6)}$ schneiden, so schneiden sich auch JK und S_1S_2 , d. h. die Geraden JK sind Erzeugende einer Fläche $V^{(4)}$. Die Paare von Quadrupeln J und K stehen somit in der Beziehung, wie die Quadrupel M und N der frühern Betrachtung, und wir können

daher mittelst einer der Involutionen $\mathfrak{P}_i^{(2)}$ zu jedem Quadrupel K das entsprechende J bestimmen. Wählen wir als solche etwa die Ebeneninvolution an der Kante $M_1 M_4$, also mit s^{P_2} und s^{P_3} in ihrem Spurenbüschel an S_{14} als dem einen, und den Tangenten in M_1' und im Schnitt von L_4 mit s^{P_1} als dem andern Paar, oder mit P_h als Pol im Hilfskreise H , so bestimmen die entsprechenden zu den zwei Paaren von Strahlen nach den Punkten U_1 und U_2 auf L_1 in dieser Involution zwei weitere Paare reeller Strahlen an S_{14} , welche L_4 in Punkten U_1^* und U_2^* zweier neuen Vierecke schneiden, welche jetzt die Durchstossunkte S_{14}, S_{24}, S_{34} zu Diagonalknoten haben, und nach welchen die Gruppen reeller Spuren der projicirenden Tangentialebenen an die beiden reellen Gruppen der $V^{(6)}$ gehen; ebenso könnten die Spuren $s_v^{(6)}$ der nicht reellen Gruppen durch analoge Transformation der nicht reellen Schnittpunkte von K^* und L_1 bestimmt werden.

Für jede der vier Gruppen von Flächen $V^{(6)}$ giebt es eine, in welcher das Polygon mit dem Centrum als Ecke ein degenerirtes ist, mit den Tangenten in je zwei von den acht Punkten J sich schliessend, d. h. mit Schmiegungebenen in diesen Punkten durch das Centrum; also mit zwei Ecken, deren Bilder als Wendepunkte der C_3 erscheinen. Wir bezeichnen diese beiden für die Gruppe der acht reellen J mit J_2 und J_3 ; nach der Beziehung zwischen den J und K sind die erstern im Bilde die Schnittpunkte der Strahlen zwischen den S_2 und K , diese führen also ebenfalls zu den Punkten J_2 und J_3 .

Betrachten wir nun auf der durch die projicirende Ebene dieser Punkte als Tangentialebene bestimmten Fläche $V^{(6)}$ ein Polygon mit zwei Scheiteln S_2 und vier Punkten K als Ecken, so liegen diese paarweise in drei Strahlen durch die Ecke M_4 , und die Seiten des Polygons schneiden sich paarweise in der Gegenebene P_4 ; zu der Fläche $V^{(6)}$ einer Gruppe zu vier wird in dieser Weise für alle ihre Sechsecke ein bestimmter Punkt M_i und eine bestimmte Gegenebene P_i des Tetraeders zugeordnet, und man kann deshalb die sechszehn Flächen $V^{(6)}$ auch in Bezug auf ein solches Paar in Gruppen zu vier zusammenfassen.

Die sechs noch möglichen Verbindungslinien zwischen

den sechs Ecken des Polygons bilden die Seiten zweier Dreiecke von schon besprochener Eigenschaft, dass die Tangente in jeder Ecke mit der Gegenseite auf der nämlichen Fläche liegt. Denn durch eine beliebige Ecke S_2 gehen beispielsweise zwei Erzeugende von $V^{(6)}$ nach zwei Ecken K , die Verbindungslinie dieser Punkte liegt aber mit zwei weiteren Punkten K und dem Punkte M_4 in einer Ebene, wird also noch von der Verbindungslinie der zwei andern Ecken, sagen wir K' , geschnitten, so dass die Tangente in S_2 und $K'K'$ von derselben dritten Geraden geschnitten werden, also auf derselben Fläche liegen, und zur gleichen Schaar gehören. Genau so zeigt man jetzt, dass die Tangente in jedem Punkte K' und die Gerade S_2K' dieselbe Fläche ergeben, so dass wir wirklich zu zwei Dreiecken $K'S_2K'$ und KS_2K von der genannten Art gelangen.

Der Beweis bleibt unverändert bestehen für eine allgemeine Lage des Polygons auf der Fläche, und gilt für jede der drei andern Flächen $V^{(6)}$ der Vierergruppe und ihr zugehöriges Paar M_i, P_i . Wir können daher allgemein sagen:

Jedes Polygon einer Sechsschlussfläche $V^{(6)}$ setzt sich aus zwei für die entsprechende Ecke M_i perspectivisch liegender Dreiecke zusammen, so dass in der Projection die Tangente jeder Ecke sich mit der Gegenseite im Dreieck auf der C_3 begegnet.

16. Ist eines dieser Dreiecke bekannt, so ist es auch jedesmal die entsprechende Gruppe von vier Flächen $V^{(6)}$, und sind damit alle übrigen derselben Art bestimmt. Für die Gruppe der hyperbolischen $V^{(6)}$ sind die Dreiecke alle ganz reell; für die Gruppe der elliptischen Flächen ist je eine Ecke und ihre Ebene reell; für die nicht reellen $V^{(6)}$ sind sie ganz imaginär. Die Dreiecke derselben Art bilden durch die Gesamtheit ihrer Seiten je eine Regelfläche mit der Raumcurve R_4 als Doppelcurve, und mit doppelt umschriebenen Developpablen aus den Punkten M_i , welche die Umrisskegel einer Vierergruppe von Flächen $V^{(6)}$ sind: sie sind also von der achten Ordnung $R^{(8)}$. Ist jeder der Umrisskegel, U_3 z. B. für die Ecke M_3 , bekannt als Spur des Tangentialkegels an jede der zur Ecke

M_3 gehörenden Flächen $V^{(6)}$, so sind damit alle Dreiecke bestimmt.

Für jede der vier Regelflächen $R^{(8)}$ bildet die Gesammtheit der Dreiecksebenen, aus welchen sie entstanden, ihre dreifach umschriebene Developpable, und weil jede Fläche des Büschels acht Tangentialebenen mit jeder gemein hat, so schliessen wir sie als von der vierten Classe, oder je als gemeinsame Developpable von vier Kegelschnitten in den Ebenen P_i . Von den Flächen $R^{(8)}$ ist nur diejenige aus der Gruppe der hyperbolischen $V^{(6)}$ reell, diejenige aus der elliptischen ist imaginär, wohl aber mit reeller dreifach umschriebener Developpablen.

Ausser der Ebene derjenigen Dreiecke, für welche das Projectionscentrum selbst die eine Ecke ist, gehen durch diese noch drei Tangentialebenen an jede Developpable. Sie begegnen der Raumcurve in neun Punkten von zwölf Dreiecken, deren Ebenen sämmtlich das Centrum als vierten Schnittpunkt besitzen, d. h. mit neun projicirenden Schmiegungebenen der Raumcurve in ihren Ecken. Für das Bild der Curve folgt demnach:

Die neun Wendepunkte der ebenen Curve dritter Ordnung liegen zu dreien in zwölf Geraden h ; durch jeden Wendepunkt gehen vier derselben, weil jede Gerade, welche zwei solche verbindet, einen dritten Wendepunkt enthalten muss.

Wir haben die vier Geraden h durch den Wendepunkt J_1 bereits construirt; sie entspringen mit derjenigen, welche die beiden reellen Wendepunkte J_2 und J_3 verbindet, aus den vier Schnittpunkten U_i^* , und wir wissen von ihnen bereits, dass zwei reell, aber nur die eine reell schneidend, und zwei nicht reell sind, somit von den Wendepunkten selbst nur drei reell erscheinen. Dieselben Verhältnisse müssen in Bezug auf die beiden andern reellen Punkte J_2 und J_3 stattfinden; durch jeden derselben muss noch eine reelle Gerade h gehen, welche wir sofort bestimmen werden, so dass von den zwölf Geraden h vier reell und acht nicht reell sind.

Fasst man diejenigen Tangentialebenen, welche räumlich an dieselbe Developpable vierter Classe gelegt sind, in eine Gruppe zusammen, so erhält man ihre Spuren oder die Linien h

in vier Systeme zu dreien geordnet. Jedes System umfasst alle neun Wendepunkte: das erste System enthält die drei reellen Wendepunkte auf der einen, die sechs nicht reellen zu dreien auf zwei nicht reellen Linien h ; das zweite System umfasst die drei weitem reellen Geraden h mit je einem reellen und zwei nicht reellen Wendepunkten; die beiden andern Systeme bestehen aus je drei nicht reellen Linien h mit jeder Seite durch einen der reellen Wendepunkte.

Man kann aber sofort eine zweite Zusammenfassung vornehmen, so geordnet, dass wieder vier Systeme entstehen, von denen jedes eine reelle und zwei nicht reelle Gerade h enthält, entsprechend der räumlichen Zusammenfassung der Tangentialebenen an die Developpablen in Gruppen zu vier durch die projicirenden Kanten des einzig reellen Dreiecks. Das erste System bleibt bei dieser Anordnung bestehen, jedes der drei andern Systeme enthält eine reelle Gerade h durch einen reellen und zwei nicht reelle Wendepunkte, nebst zwei nicht reellen Geraden durch je einen der beiden andern reellen und zwei nicht reelle Wendepunkte.

Wir wissen ferner, dass die Punkte, welche die Ebenen eines Quadrupels noch aus der R_4 schneiden, die Schnittpunkte der Schmiegungebenen in jenen sind; somit bestimmen die neun Punkte, deren Schmiegungebenen durch das Centrum gehen, neun Tetraeder ihrer Quadrupel, in welchen ihre Gegen-ebene projicirend ist. Die drei Punkte J , welche im Bilde einen Wendepunkt zum Quadrupel ergänzen, d. h. die Berührungspunkte der drei Tangenten aus einem Wendepunkte, liegen somit jedesmal in einer Geraden i . Man nennt sie die harmonische Polare, und aus der schon bemerkten Beziehung zwischen Pol und Harmonicalebene in Bezug auf das Tetraeder der M_i lässt sich zeigen, dass sie gegenüber den Wendepunkten genaue Reciprocität befolgen, d. h. zwölf Mal zu dreien durch einen Punkt H gehen.

Insbesondere liegen also die sechs reellen Punkte J , welche J_2 und J_3 zu einer achtpunktigen Gruppe ergänzen, zu dreien in zwei reellen Geraden i_2 und i_3 ; für den Punkt J_1 ist die Verbindungslinie der Kegelspitzen M_i ($i = 1, 2, 3$) diese Gerade i_1 .

Die beiden Punkte J_2 und J_3 bestimmen die Spur einer Fläche $V^{(6)}$; sie sind somit — wenn wir der Entwicklung an dieser Stelle etwas vorgreifen — als F.-Punkte für den Steiner'schen Sechsschluss Träger von Strahleninvolutionen dritter Ordnung. Nebst der C_3 erzeugen diese noch einen Kegelschnitt, der in diesem Falle in eine Gerade durch die F.-Punkte und die Gerade i_1 zerfallen muss. Betrachten wir nun dasjenige Sechseck aus J_2 und J_3 , welches einen Wendepunkt als Ausgangsecke hat, so bestehen seine Seiten aus Linien h , und daher müssen sich zwei Gerade h stets auf einer Linie i schneiden; die reellen h_2 und h_3 durch J_2 und J_3 gehen somit nach den Schnittpunkten der reellen Geraden h_1 mit i_3 und i_2 resp. Sie bilden mit h_1 das reelle Dreieck $A_1 A_2 A_3$ des zweiten Systems in der ersten Anordnung der Linien h .

Die zwölf Geraden h schneiden sich ausser den Wendepunkten noch in zwölf Punkten A ; je vier Punkte A müssen auf einer Geraden i liegen, diese repräsentiren 56 Verbindungslinien zwischen ihnen; die zwölf weiteren sind die Linien h , welche die A paarweise enthalten; und dual für die harmonischen Polaren i und ihre Schnittpunkte H .

17. Die vorliegende Curve dritter Ordnung kann als gemeinsame Hesse'sche Curve dreier Curven dritter Ordnung im Büschel ihrer Wendepunkte aufgefasst werden; dann sind die Projectionen der drei Regelflächen $R^{(4)}$ die Cayley'schen Curven für jene und die neun Geraden i ihre gemeinsamen Tangenten. Die Tangente einer Cayley'schen Curve ist die Verbindungslinie zweier F.-Punkte für den Vierschluss, oder Projection einer Linie g . Dreht man um diese im Raume eine Ebene, so schneidet sie aus dem durch g bestimmten Hyperboloid in jeder Lage eine Erzeugende heraus, welche g im Punkte A' schneiden mag, und welcher mit dem Berührungspunkte A der Ebene und der $R^{(4)}$ jedesmal ein Paar einer Involution bestimmt. Die Doppelpunkte dieser Involution auf g sind die Schnittpunkte mit der R_4 . Der Berührungspunkt einer Tangente der Cayley'schen Curve ist daher der vierte harmonische zum dritten

Schnittpunkte mit der C_3 in Bezug auf das Paar von F.-Punkten, die sie verbindet.

Die Hesse'sche Curve C_3 ist auch die Jacobi'sche Curve für das Netz der Polarkegelschnitte, welche die Punkte der Ebene mit einer der drei Curven dritter Ordnung bestimmen, und die Cayley'sche Curve die Enveloppe der degenerirten unter diesen. Jede Tangente der Cayley'schen Curve verbindet zwei entsprechende Punkte, wie die Punkte K eines Quadrupels der Hesse'schen Curve, und schneidet sich im ergänzenden Punkte mit einer zweiten Verbindungslinie zweier Punkte K , welches Linienpaar als Polarkegelschnitt für einen Punkt der Hesse'schen Curve aufzufassen ist. Jeder der Punkte K ist Pol für das noch durch den andern gehende Tangentenpaar der Cayley'schen Curve, dem jeweiligen Paare von Doppelementen in der quadratischen Strahleninvolution des Vierchlusses. Diese beiden Geradenpaare bestimmen die Grundpunkte G eines Büschels von Polarkegelschnitten, welches der Verbindungslinie der beiden Punkte K als Ort der Pole für eine der drei Curven dritter Ordnung entspricht. Dem Punkte J_2 der Gerade g' durch das Punktepaar K in Taf. V entspricht das dritte Linienpaar dieses Büschels; dieses geht also durch den entsprechenden Punkt auf der Hesse'schen Curve zum Punkte J_2 , oder ist die Tangente aus J_2 an diese, und die harmonische Polare i_2 . Die Reihe der Pole auf der Verbindungslinie der Punkte K , und die Involution der Schnittpunktepaare der Kegelschnitte des Polarenbüschels ergeben als die drei gemeinsamen Elemente auf der betrachteten Geraden ihre Schnittpunkte mit der zugehörigen Curve dritter Ordnung.

Speciell für die Tangenten aus dem Wendepunkt J_2 an die Hesse'sche Curve mit dem Berührungspunkt J ist diese Tangente und die harmonische Polare i_2 der Polarkegelschnitt für den Punkt J_2 . Zum Punkte J gehört ferner ein Polarkegelschnitt als Linienpaar durch den Wendepunkt, doppelt gelegt; alle Kegelschnitte des Polarenbüschels haben die Tangente nach J in J_2 gemeinsam und alle drei Punkte der Curve dritter Ordnung fallen im Wendepunkte auf dieser zusammen. Somit haben die drei Curven dritter Ordnung, welche zu den

vorliegenden drei Cayley'schen Curven gehören, die Tangenten aus den Wendepunkten an ihre gemeinsame Hesse'sche Curve zu ihren Wendetangenten.

Die Cayley'sche Curve ist dritter Classe und sechster Ordnung, und aus der Construction des Berührungspunktes ihrer Tangenten folgt, dass diese und die Hesse'sche Curve sich in den neun Berührungspunkten J selbst berühren, und also auch die zugehörigen Tangenten zu gemeinschaftlichen haben, sowie dass die neun harmonischen Polaren i die neun gemeinsamen Rückkehrtangenten der drei Cayley'schen Curven sind, mit je dem vierten harmonischen eines Punktes J in Bezug auf die beiden andern als Rückkehrpunkten. Die Punktinvolution des Vierschlusses besitzt demnach keine Doppelemente, wie das auf dem Träger vom Geschlechte Eins zu erwarten ist.

Diese Betrachtungen knüpfen an eine räumliche Entwicklung der Polarentheorie der ebenen Curven dritter Ordnung; wir werden jedoch ihre bekannten Ergebnisse hier nicht weiter verfolgen, sondern kehren zu den Steiner'schen Secantenpolygonen der R_4 zurück.

V.

18. Durch die Verbindungsgeraden des Projections-Centrums mit den neun Punkten der zwölf Dreiecke, welche sich als die zwölf Dreiecke der Linien h durch die Wendepunkte projiciren, entstehen neun Flächen des Büschels und wir zeigen jetzt, dass alle acht übrigen durch jede unter ihnen eindeutig bestimmt sind, oder dass eine solche Gruppe ein Involutionselement bildet. Betrachten wir ein durch ein Quadrupel von Punkten $ABCD$ bestimmtes Tetraeder, so schneiden seine Ebenen die R_4 in Punkten $A'B'C'D'$ eines zweiten Quadrupels. Ist D' der in der Ebene ABC gelegene Punkt, so liegen AD' und BC auf derselben Fläche; ihre Ebene enthält also die Tangente in A und die Punkte $A'B'C'D'$ sind somit die Schnittpunkte der Schmiegungebenen in $ABCD$, wie schon bekannt. Die Tetraederebenen aller Quadrupel mit einer Ecke aus einer Gruppe von neun Punkten mit Schmie-

gungsebenen durch denselben Punkt S schneiden sich also zu neun in Punkten des Quadrupels S .

Eine Flächengruppe zu neun ist dann bestimmt durch die Verbindungslinien eines Punktes S mit seinen neun entsprechenden, oder durch die Tangenten in diesen; weil aber je drei Punkte eines Dreiecks mit S in einer Ebene liegen, so gehören die 36 Verbindungslinien zwischen neun Punkten jeder Gruppe zu vieren mit der Tangente im letzten zur selben Schaar einer Fläche. Jede Gruppe von neun Flächen besteht dabei aus drei hyperbolischen, drei elliptischen und drei nicht reellen Flächen, welche somit ein Involutions-element einer Flächeninvolution neunter Ordnung im Büschel bilden.

Die reellen Punkte jeder Gruppe — für welche wir die Betrachtung zunächst weiter führen — sind Punkte eines Dreiecks, dessen Seiten den Umrisskegel aus M_3 an das zur Ecke M_3 gehörende Hyperboloid $V^{(6)}$ bestimmen. Dieser Umrisskegel ergiebt am einfachsten die jedesmal reellen drei Punkte jeder Gruppe, und es wird daher im Sinne einer Vereinfachung liegen, in der allgemeinen Disposition der Taf. VI die Spur L_3 des Kegels aus M_3 , sowie den Umrisskegelschnitt U_3 als Spur jenes Kegels an $V^{(6)}$ aus derselben Spitze anzunehmen, und im Uebrigen die Disposition entsprechend zu vervollständigen.

Macht man insbesondere die Spur s^{P_4} zur Centrale des Spurkreisbüschels, also M_4' im Bilde unendlich fern, so wird U_3 mit L_3 concentrisch, hat diese Spur zur einen Axe und bestimmt mit L_3 zusammen das Umrissssystem des Flächenbüschels aus M_3 ; die Spur L_1 muss somit das durch S_{13} gehende reelle Linienpaar dieses Systems berühren. Es ist leicht zu übersehen, dass über den Punkt M_3' so verfügt werden kann, dass die Punkte der Raumcurve R_4 , die den Ecken eines gegebenen, dem Umrisskegelschnitt U_3 umschriebenen Dreiecks entsprechen, im Bilde zu den drei reellen Wendepunkten gemacht werden können.

Wählen wir nach diesen Festsetzungen das Dreieck 123, welches M_3' zur einen Ecke hat, oder das projecirende Dreieck,

wie wir sagen können, so gelangen wir zu den Punkten $N_1 N_2 N_3$ und $N'_1 N'_2 N'_3$ zweier für M_3 perspectivischer Dreiecke der Raumcurve. Sie sind die sechs Ecken eines Polygons auf dem zu M_3 und U_3 gehörenden Hyperboloid $V^{(6)}$, für welches das Centrum selbst eine Ecke ist. Die Gerade $N'_2 N'_3$ geht also durch den Punkt S_t^c des Bildes, und ist die Spur $s_v^{(6)}$ der projecirenden Tangentialebene von $V^{(6)}$. Die drei Punkte $N_1 N_2 N_3$ sind Punkte eines Dreiecks, die Tangenten in ihnen und die Gegenseiten begegnen sich somit in denselben Punkten der Curve, so dass in Taf. VI F_1 der Schnittpunkt der Tangente in N_1 mit $N_2 N_3$ ist u. s. f.

Ergänzen wir die Punkte N_i zu einem Quadrupel, so entstehen drei neue Dreiecke $N_1 N_2 N_3$; denn diese sind durch zweimalige Projection des ersten aus zwei Ecken M_i entstanden. Die Verbindungsgeraden innerhalb der vier Gruppen von je neun Punkten der B.-Quadrupel liegen aber alle auf denselben neun Flächen, welche durch die Tangenten bestimmt sind; ihre Zahl von $4 \cdot 36$ vertheilt sich zu 16 auf jede Fläche, und daher müssen die Verbindungslinien irgend eines Punktes N_i mit irgend einem andern in derselben Gruppe zu neun, durch einen der drei Punkte F_i gehen, und nach der eingeführten Bezeichnung erkennen wir diese Beziehung leicht in der Form: Zwei Punkte N_i liegen mit einem Punkte F_i in einer Geraden, wenn die Indices der drei Punkte alle gleich oder alle verschieden sind.

Zur Unterscheidung von den weiteren Punkten F , die auftreten, wollen wir die drei soeben construirten Punkte F_i mit Strich versehen, also in der Folge mit F'_i bezeichnen. Fassen wir nun für die Punkte F'_1 und F'_2 als F.-Punkte, ausgehend von einem Punkte N auf dem Ovale und unendlichen Ast resp., jedesmal den Linienzug $N_1 N_2 N_3$ als degenerirtes Sechseit auf, mit zwei einfachen Seiten, den Tangenten in N_1 und N_2 , mit zwei Doppelseiten durch N_3 und drei zusammenfallenden Eckenpaaren, so können wir die Tangente in N_1 und die Gerade $N_2 N_3$ doppelt gelegt, ebenso die Tangente in N_2 und die doppeltgedachte Seite $N_1 N_3$ je als Gruppe einer Strahleninvolution dritter Ordnung an den Punkten F'_1

und F_2' ansehen; je zwei Mal für das Oval und den unendlichen Ast.

Ergänzt man dann die dem gemeinsamen Scheitelstrahl entsprechende Gruppe, so entspringt aus einer projectivischen Verbindung beider Involutionen, in der diese drei Gruppen sich entsprechen, eine Curve fünfter Ordnung C_5 mit Doppelpunkten in den Scheiteln F_1' und F_2' . Unsere C_3 geht durch diese und die Doppelpunkte der C_5 in den zwei Punkten N_3 , berührt sie in zwei Punkten N_1 und zwei Punkten N_2 , hat also sechszehn Punkte mit ihr gemein. Die Curve dritter Ordnung, mit der wir uns beschäftigen, ist also ein Bestandtheil der C_5 , als Rest bleibt ein Kegelschnitt K durch die vier Doppelpunkte des Gesammterzeugnisses.

Die Strahlen je zweier entsprechender Gruppen schneiden sich in sechs Punkten der C_3 und drei Punkten von K . Diese bilden je ein Dreieck, dessen Seiten durch die drei Punkte F_i' gehen, weil der Punkt F_3' sich gegenüber F_1' genau analog verhält wie F_2' , zufolge der Eigenschaft der Punkte N_i als Dreieckspunkte. Die Involution am Punkte F_1' bleibt also dieselbe, ob man sie mit derjenigen an F_2' oder F_3' combinirt; d. h.: Jedes Sechseck, das aus einer Combination zweier F_i' entstanden ist, kann auch aus einer der zwei andern entstanden gedacht werden, so dass die sechs Ecken jedes auftretenden Sechsecks für alle drei Punkte F_i' perspectivisch liegen.

Die Punkte F_i' sind also F.-Punkte für eine unendliche Folge Steiner'scher Sechsecke und aus ihrer Gleichbedeutung für jedes der auftretenden Sechsecke folgt, dass die Tangenten der C_3 in den F_i' und die Strahlen nach den beiden andern F.-Punkten je ein Element ihrer Strahleninvolution bilden müssen. Da nun die Tangenten in zwei Punkten F_i' auf der C_3 sich nicht schneiden dürfen, so begegnen sich die Tangente in jedem Punkte F_i' und die Verbindungslinie der beiden andern in je einem Punkte T_i der Curve. Die Punkte F_i' besitzen demnach die Eigenschaft von Dreieckspunkten; aus ihnen sind die T_i genau so abgeleitet, wie die F_i' aus den N_i , d. h. auch diese und die

N_i sind F.-Punkte für den Sechsschluss, entsprechend der von Steiner gemachten Bemerkung über diese Punkte.

Die drei Punkte F'_i sind die reellen einer Gruppe von neun; diese lassen sich aber für jeden der Punkte F'_i in Paare zusammenfassen, welche mit ihm ein Dreieck von derselben Beschaffenheit bilden, wie die drei reellen. Diese Anordnung lässt sich von jedem der neun Punkte aus herstellen und wir schliessen, dass jede Combination zwischen zwei solchen ein Paar von F.-Punkten bildet, sowie, dass an jedem Punkte F'_i nur vier verschiedene Strahleninvolutionen auftreten.

19. Es wiederholt sich demnach auch für diese Involution im Flächenbüschel die schon bekannte doppelte Entstehungsart derselben (Art. 3); ist diese durch Verbindung aller Punkte der R_4 mit derjenigen Gruppe von neun Punkten gedacht, für welche das Centrum der Punkt S ist, so folgt für das Bild der Curve die Beziehung:

Die neun Wendepunkte der Curve dritter Ordnung bilden eine Gruppe von F.-Punkten für den Sechsschluss; ihre Verbindung mit einem beliebigen Punkte P der Curve liefert wieder eine Gruppe von solchen, und diese Gruppe durchläuft die ganze Punktinvolution neunter Ordnung, wenn P sich über die ganze Curve bewegt.

Auf jeder Fläche des Büschels liegen vier verschiedene Involutionen ihrer Regelschaar; je zwei Gruppen der Involution dritter Ordnung sind aber drei Paare einer der drei quadratischen Regelschaarinvolutionen der Fläche, wie die Herstellung der Involution dritter Ordnung aus denjenigen Gruppen, welche ein Doppelement enthalten, ohne Weiteres lehrt. Die sechszehn Doppelemente der vier verschiedenen Involutionen sind nach ihrer Bedeutung als Doppelseiten degenerirter Polygone Verbindungsgeraden der acht B.-Quadrupel der andern Flächen der Gruppe, und wir sehen somit wieder bestätigt, dass die neun B.-Quadrupel aus einem Quadrupel S als den gemeinsamen Schnittpunkten ihrer Schmiegungebenen entstehen.

Die sechszehn Doppelemente sind Seiten von Dreiecken; in der Projection Verbindungslinien von F.-Punkten, und umhüllen als Bilder von vier Regelflächen $R^{(8)}$ vier Curven

sechster Classe. Aus jedem Punkte der C_3 gehen an jede vier Tangenten, welche zwei von dem betrachteten verschiedene F.-Punkte verbinden; vom Punkte S_t^c speciell die vier schon bekannten Gruppen von Spuren $s_v^{(6)}$ der projicirenden Tangentialebenen der $V^{(6)}$; diese selbst sind die projicirenden Ebenen der sechzehn Doppelemente für diejenigen Regelschaarinvolutionen, welche die Centrumstangente schneiden. In Taf. V sind zwei dieser Spuren für hyperbolische Flächen $V^{(6)}$ eingetragen.

Infolge der Zusammensetzung der Involutionen dritter Ordnung bilden die vier Doppelemente zwei Paare einer der drei quadratischen Involutionen am betrachteten Scheitel. Die vier Punkte N_i eines Quadrupels liegen demnach mit zwei Punkten F_i auf einem Kegelschnitt, wenn alle drei Indices verschieden sind. Aus den 36 Combinationen zu zweien innerhalb der neun Punkte jeder Gruppe entspringen 36 Kegelschnitte; durch jeden F.-Punkt gehen acht und durch jedes Quadrupel von B.-Punkten sechzehn derselben.

VI.

20. Bis jetzt sind von den Verbindungslinien zwischen den neun B.-Quadrupeln einer Flächengruppe nur je die 36 Geraden in Betracht gekommen, welche Punkte innerhalb jeder der vier Gruppen zu neun verbinden und welche mit den Tangenten in diesen zur selben Schaar gehören. Verbinden wir aber jetzt die Punkte verschiedener Gruppen von neun untereinander, so entsteht aus jeder Combination eine neue Gruppe von neun Flächen; aus je zwei solchen aber, welche alle vier Gruppen zusammen umfassen, je dieselbe Flächengruppe. Diese Verbindungslinien enthalten auch diejenigen zwischen den Punkten der einzelnen Quadrupel selbst, und die drei neu hinzutretenden Flächengruppen sind somit die durch die Linien g aller neun Quadrupel bestimmten. Wir haben somit eine geschlossene Gruppe von 36 Flächen; sie bilden zugleich neun Gruppen der Viererinvolution und vier Gruppen der Involution neunter Ordnung.

In Taf. VI giebt es drei reelle Quadrupel N_i ; die Verbindungslinien zweier solcher unter sich führen zu drei Gruppen von je drei neuen Punkten F_i , die mit den bereits gefundenen F'_i je ein Quadrupel bilden; sie sind somit die Berührungspunkte der Tangenten aus den drei reellen Punkten T_i . Als Durchstosspunkte der projecirenden Strahlen auf den drei neuen Flächengruppen bilden sie drei Dreiecke $F_1 F_2 F_3$, deren Gegenseiten mit den Tangenten der Ecken sich somit in den Punkten T_i begegnen, und sie liegen mit zwei Punkten N_i in gerader Linie, wenn wieder alle drei Indices gleich oder ungleich sind. Die Figur zeigt sofort mit der Tangente in N_1 auf dem Oval oder dem unendlichen Aste als erster Seite den Linienzug $N_1 N_2 N_3 N_3 N_2 N_1$, der etwas hervorgehoben ist, als je ein degenerirtes Zwölfsseit mit fünf Doppelseiten und sechs Doppelecken für F'_1 und F_3 als F.-Punkten.

Die an ihnen entstehenden Strahleninvolutionen sechster Ordnung mit den Gruppen, welche den gemeinsamen Scheitelstrahl als entsprechenden enthalten, ergeben als Erzeugniss ihrer projectivischen Verbindung eine Curve elfter Ordnung mit fünffachen Punkten in F'_1 und F_3 . Die C_3 berührt diese in den Punkten N_1 ; geht durch ihre acht Doppelpunkte in N_2 und N_3 und die fünffache Scheitel, ist somit mit 34 gemeinsamen Punkten nothwendig ein Bestandtheil von ihr. Aber die Tangente in N_1 und die doppeltgelegte Gerade $N_2 N_3$ bilden nicht nur zwei Gruppen der Involution dritter Ordnung, der wir schon am Punkte F'_1 begegnet, sondern auch drei Paare einer quadratischen Involution; ebenso bilden die drei Strahlen durch F_3 doppelt zu nehmen zwei Gruppen der Involution dritter Ordnung; mit $N_2 N_3$ als einem Doppelement und $N_1 N_2$ als doppelt gedacht drei Paare einer quadratischen Involution des Vierschlusses. Diese Involution ist also auch hier die fundamentale; alle Doppelemente treten in Paaren dieser auf, und das Erzeugniss zerfällt nebst der C_3 in zwei Curven vierter Ordnung C_4 mit Doppelpunkten in den Scheiteln; ihre Schnittpunkte unter sich und mit der C_3 bilden die 24 Doppelpunkte des Gesamtgebildes.

Durch Betrachtung der dem Scheitelstrahl entsprechenden

Gruppen liesse sich nun leicht beweisen, dass diejenigen Punkte, welche mit F_1' F.-Punkte sind für den Zwölfschluss, die Berührungspunkte der Tangenten aus den T_i sein müssen, wenn wir es nicht bereits wüssten.

Setzen wir an Stelle der drei reellen jedesmal die Gruppe der neun Punkte F_i , so bilden die 27 neuen Punkte F_i , welche mit den F_i' dieselbe Tangentialgruppe T_i besitzen, die Ergänzenden zu einer geschlossenen Gruppe von 36 Punkten in neun Gruppen zu vier und vier Gruppen zu neun. Jedes Paar von Punkten aus verschiedenen Untergruppen ist F.-Punktepaar für den Zwölfschluss. Aus der analogen Bildung der Gruppen N_i wie derjenigen der F_i folgt, dass auch diese eine Gruppe von 36 F.-Punkten bilden; es ist der bis jetzt stets (Art. 3) hervorgetretene Zusammenhang zwischen drei perspectivisch liegenden Gruppen in der besondern Art, dass zwei davon als in der Gruppe der N_i vereinigt zu denken sind.

Jede Fläche lässt sich mit 24 andern combiniren, und trägt zwölf verschiedene Involutionen sechster Ordnung, aber für jede von diesen sind unter den Doppelementen diejenigen einer Involution dritter Ordnung und einer quadratischen enthalten, so dass nur 48 eigentliche solche auftreten. Die 36 B.-Quadrupel jeder Flächengruppe ordnen sich in vier Gruppen zu 36 Punkten, auf jeder Fläche liegen von den Verbindungslinien innerhalb jeder der vier Gruppen 70 Gerade; weil die 36 Flächen aber neun Gruppen zu vier, so sind unter diesen $9 \cdot 24$ oder $6 \cdot 36$ Linien g , und weil sie ebenso vier Gruppen zu neun, so sind von ihnen weitere sechzehn Doppelemente der Involutionen dritter Ordnung. Es bleiben somit 48 Gerade für jede Fläche, welche Punkte aus verschiedenen Gruppen zu vier und neun verbinden und somit die eigentlichen Doppelemente sind.

Acht Flächen einer Gruppe von neun schneiden durch ihre Linien g von den B.-Quadrupeln 24 heraus, die zu ihrer Gruppe von 36 gehören und wir schliessen daraus, dass in Taf. V die Punkte K F.-Punkte für den Zwölfschluss und dass ihre Verbindungsgeraden durch S_i^c die Spuren $s_v^{(12)}$ der pro-

girenden Tangentialebenen an vier Flächen $V^{(12)}$ sind. Sie sind auch die Tangenten an eine von zwölf Curven sechster Classe, den Projectionen von ebenso vielen Regelflächen $R^{(8)}$, welche zu dreien aus jeder Gruppe von Flächen $V^{(6)}$ entspringen und die Umrisskegel der Flächen $V^{(12)}$ aus den Punkten M_i zu doppeltumschriebenen Developpablen haben. An jede dieser Curven gehen aus S_i^c noch vier Tangenten, die Spuren $s_v^{(12)}$ der das Centrum enthaltenden Tangentialebenen der Flächen $V^{(12)}$.

Die betrachtete Flächeninvolution von der Ordnung 36 ist die erste, deren Elemente gleichartig aus Elementen zweier verschiedener Flächeninvolutionen niedrigerer Ordnung zusammengesetzt sind. Sie kann als Erweiterung oder Transformation der Viererinvolution in derjenigen des Sechsschlusses und umgekehrt angesehen werden. Als die einfachere ist die Viererinvolution als fundamentale zu betrachten. Durch Ergänzung ihrer Doppelemente in der andern Involution entstehen 54 solche, dazu kommen die 16 Doppelemente der Involution neunter Ordnung. Unter den 54 sind aber die sechs Flächen $V^{(4)}$ enthalten; die 48 übrigen sind die zwölf Vierergruppen von Flächen $V^{(12)}$.

21. Wir gelangten zu einer Gruppe von 36 Flächen durch die Verbindungsgeraden sämtlicher Punkte der B.-Quadrupel von neun Flächen. Verbinden wir jetzt die vier Gruppen von neun Quadrupeln einer Gruppe von 36 Flächen untereinander, so entstehen drei neue derartige Gruppen. Wir haben somit sechzehn Gruppen von neun Flächen; verbinden aber, um diese zu bilden, je die Quadrupel derselben Vierergruppe untereinander; daher sind jene $4 \cdot 36$ Flächen auch neun Gruppen zu sechzehn. Man bemerkt, dass bei Fortsetzung dieses Verfahrens jedes folgende Involutionselement durch Zufügung von drei Gruppen der vorhergehenden Involution zu einer solchen entstanden ist, so dass wir bei k -maliger Wiederholung 2^{2k} Gruppen von je neun Flächen haben; dass aber andererseits diese Flächengruppe ebenso aus neun Gruppen von je 2^{2k} Flächen besteht.

Die Transformation der Flächeninvolution neun-

ter Ordnung in derjenigen von der Ordnung 2^{2k} ergibt demnach mit der umgekehrten Transformation dieselbe Involution von der Ordnung $(3 \cdot 2^k)^2$.

Die Erweiterung jeder neunpunktigen Gruppe in der Viererinvolution und die umgekehrte Erweiterung sind identisch; aber auch die Erweiterung jedes Dreiecks in einer vierpunktigen Gruppe und die Umkehrung sind identisch, d. h. vier solche Dreiecke sind auch drei Vierergruppen, wie räumlich ohne Weiteres evident.

Man vollzieht im Bilde diese Erweiterung, indem man von dem gegebenen Dreieck zum Tangentialdreieck übergeht, und aus diesem die Tangenten an die Curve legt; die drei Vierergruppen der Berührungspunkte besitzen sodann denselben Zusammenhang wie die drei Tangentialpunkte. Man erweitert das Ausgangsdreieck ferner zu einer Gruppe von $3 \cdot 16$ Punkten, indem man das Tangentialdreieck zu einer zwölfpunktigen Gruppe erweitert, und diese als neue Tangentialgruppe nimmt, woraus folgt, dass auch hier die drei sechszehnpunktigen Gruppen sechzehn Dreiecke bilden.

Nun bestimmen die neun Punkte einer Gruppe für jeden Punkt F der C_3 viermal eine Involution dritter Ordnung, je durch drei Gruppen bestimmt. Halten wir unter diesen eine fest, etwa diejenige, die durch das Ausgangsdreieck bestimmt ist, so folgt aus der in Art. 9 entwickelten Zuordnung der sechzehn Strahlen in je vier vierstrahlige Gruppen, dass die Erweiterung der dreistrahligen Gruppe in der Strahleninvolution vierter Ordnung auf vier dreistrahlige Gruppen führt, und sofort allgemein, dass das Transformationsgesetz für die Flächeninvolutionen auch dasjenige der Regelschaarinvolutionen von den Ordnungen 3 und 2^k nach sich zieht und für diese gültig bleibt.

Sei nun G_1 eine Fläche, welche mit einer Hilfsfläche H den Sechsschluss, G_2 eine solche, welche mit H den $2 \cdot 2^k$ -Schluss gestattet. Ein beliebiges Sechsseit des ersten Flächenpaares besitzt drei Seiten $\overline{AB_1}$ auf G_1 und drei Seiten $\overline{BA}$ auf H ; vervollständigt man sodann für jede der Geraden $\overline{BA}$ das Polygon von $2 \cdot 2^k$ Seiten mit $3 \cdot 2^k$ der-

selben — sagen wir $\overline{AB_2}$ — auf G_2 und ebenso vielen auf H , so sind die letztern nicht nur drei Gruppen zu 2^k , sondern auch 2^k Gruppen zu drei, und können demnach durch je drei Gerade $\overline{AB_1}$ auf G_1 zu einem Sechseck ergänzt werden. Lässt man jetzt die Hilfsfläche weg, so bleibt ein geschlossener Linienzug von $2 \cdot 3 \cdot 2^k$ Seiten auf den Flächen G_1 und G_2 übrig.

Die Transformation der Involution des Sechsschlusses in derjenigen des $2 \cdot 2^k$ -Schlusses ist somit die Involution für den $2 \cdot 3 \cdot 2^k$ -Schluss, also äquivalent der Multiplication der Polygonseitenzahl mit 2^k .

Dieses Resultat für das Curvenbild ausgesprochen giebt zwischen den Gruppen von F.-Punkten folgenden Zusammenhang:

Die Verbindungslinien zwischen den neun Punkten F einer Gruppe von F.-Punkten für den Sechsschluss schneiden sich in ihrer Tangentialgruppe T von derselben Art. Die Berührungspunkte ihrer Tangenten ergänzen F zu einer Gruppe F_1 von 36 Punkten; zwei Punkte in dieser aus verschiedenen Gruppen von vier und neun sind F.-Punkte für den Zwölfschluss. Die Verbindungslinien dieser 27 Berührungspunkte begegnen der C_3 in den Berührungspunkten der Tangenten aus den F und ergänzen die Gruppe T zu einer solchen T_1 von 36 Punkten wie F_1 . Die Berührungspunkte ihrer Tangenten ergänzen F_1 zu einer Gruppe von 144 Punkten; zwei ihrer Punkte aus verschiedenen Gruppen von 16 und 36 sind F.-Punkte für Polygone von 24 Seiten u. s. f.: Es ist die Ableitung aller Gruppen durch fortgesetztes Tangentenziehen von einer Anfangsgruppe von neun Punkten T aus.

22. Wir haben die neun Punkte einer Gruppe räumlich aus einem Punkte S als dem gemeinsamen Schnittpunkte ihrer Schmiegungebenen abgeleitet; ergänzt man den Punkt S selbst zu einer neunpunktigen Gruppe, so entstehen im Ganzen neun Gruppen $G_1 \dots G_9$ und wir zeigen von diesen zunächst, dass sie genau unter sich den Zusammenhang befolgen, wie die neun Punkte jeder von ihnen selbst.

Von den 81 Punkten dieser Gruppe G sind neun reell; sie bilden drei Dreiecke $A_i B_i C_i$ mit den drei reellen Punkten S_i als je dem vierten Schnittpunkt ihrer Ebene mit der R_4 . Die Tangenten und Seiten der ersten bestimmen drei Flächen einer Gruppe, ihre Erzeugenden durch die Ecken des Dreiecks von Punkten B_i führen zu denjenigen eines Dreiecks aus Punkten C_i ; die Ebenen derselben schneiden die Curve in einem Punkte S_2 und S_3 resp. und die Verbindungslinie $S_2 S_3$ ist dabei stets Erzeugende der Regelschaar, welche durch die Tangente in S_1 bestimmt ist. Rückt der Punkt S_2 in die zweite Ecke des durch S_1 bestimmten Dreiecks, so ist S_3 die dritte Ecke. Dies gilt genau so für die übrigen Dreiecke S_i und somit lassen sich die neun Gruppen G_i zwölf Mal in Gruppen zu drei so zusammenfassen, dass die Verbindungslinien je zweier mit den Tangenten und Verbindungslinien der dritten dieselbe Gruppe von neun Flächen ergeben. Auf jeder solchen Flächengruppe liegen die Verbindungslinien von vier Paaren der acht übrigen G_i ; auf jeder Fläche somit 40 Gerade, nämlich vier Verbindungslinien zwischen Punkten derselben und 36 zwischen solchen verschiedener G_i .

Kehren wir nochmals zu den drei reellen Dreiecken zurück. Die 36 Verbindungslinien zwischen diesen neun Punkten liegen zu vier auf derselben Fläche. Diese enthält die Tangente in einem Punkte z. B. A_1 , die Gerade $A_2 A_3$ und drei Verbindungslinien zwischen den B_i und C_i . Verbindet man jetzt A_1 mit einem Punkte B_i z. B. mit B_1 , so ist dadurch eine zweite Fläche bestimmt, welche auch $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$, sowie die Tangente in einem Punkte C_i und seine Gegenseite enthält. Es entsteht dadurch ein fortlaufender Linienzug — weil jeder Punkt mit Ausnahme von A_1 und eines Punktes C_i zwei Mal verbunden wurde — der sich mit den Tangenten in diesen Punkten auf denselben Flächen schliesst; also ein degenerirtes Polygon von 18 Seiten. Die 36 Geraden setzen sich somit zu vier und vier in einen fortlaufenden Linienzug zusammen; für jede der sechs Combinationen, die man mit jeder der neun reellen Flächen vornehmen kann, bleiben die auf ihr liegenden vier Geraden dieselben.

Die betrachtete Flächeninvolution von der Ordnung 9^2 ist somit diejenige des 18-Schlusses.

Jede Fläche lässt sich mit 72 andern combiniren; sie bestimmen auf ihr, wie wir soeben an den degenerirten Polygonen bemerkt, zu sechs dieselbe, also zwölf verschiedene Involutionen neunter Ordnung mit 192 Doppelementen; weil aber jede Gruppe der Regelschaarinvolution sich aus drei Gruppen derjenigen dritter Ordnung zusammensetzt, so bleiben nur 144 eigentliche Doppelemente; sie schneiden die R_4 in den 72 B.-Quadrupeln der mit der betrachteten combinirten Flächen.

Gemäss der Zusammensetzung jedes Elementes aus neun Gruppen zu neun gilt für die Flächeninvolution wieder das doppelte Gesetz ihrer Entstehung, und auch ihre Doppelemente müssen aus denjenigen der Involution neunter Ordnung hervorgehen. Je eine Vierergruppe von Flächen $V^{(6)}$ und eine Kegelfläche bilden zusammen eine Gruppe von neun; der zugehörige Punkt S ist ein Scheitel der Curve; zwei Punkte der Gruppe S auf derselben Erzeugenden jenes Kegels ergeben aber paarweise vereinigte Gruppen von je neun Flächen, im Ganzen also — weil vier Gruppen von Flächen $V^{(6)}$ existiren — $4 \cdot 36$ Flächen $V^{(18)}$.

Die projecirenden Tangentialebenen an diese Flächen sind die projecirenden Ebenen nach den Doppelementen für diejenigen Regelschaarinvolutionen, welche die Centrumtangente schneiden.

23. Fasst man nun eine der betrachteten Gruppen von 81 Punkten als Gruppe von Punkten S auf, so gelangt man dadurch zu einer Punkt- und Flächeninvolution von der Ordnung 9^3 . Bezeichnen wir jetzt die Gruppen von 81 Punkten mit G_i , so besteht zwischen diesen neun Gruppen genau derselbe Zusammenhang wie vorhin. Drei derselben G_1, G_2, G_3 enthalten zusammen 27 reelle Punkte; die Verbindungslinien zwischen den neun Punkten der Gruppe G_2 mit derjenigen von G_3 liegen auf den neun reellen Flächen aus Tangenten und Verbindungsgeraden von G_1 . Aus dieser Gruppe entspringen für jede Fläche vier Gerade, aus der Verbindung von G_2 mit G_3 je

neun weitere; es sind die dreizehn Geraden, welche von den Verbindungslinien zwischen 27 Punkten auf jeder der 27 Flächen liegen müssen. Jede der neun reellen Flächen der Gruppe G_1 lässt sich mit den 18 reellen der Gruppen G_2 und G_3 so verbinden, dass auf ihnen ein fortlaufender Linienzug von 13 Geraden der einen und 13 Geraden der andern Fläche entsteht, so dass die Tangenten im Anfangs- und Endpunkte ebenfalls den betrachteten Flächen angehören.

Wir haben ganz nach Analogie mit dem Vorausgegangenen ein degenerirtes Polygon von 54 Ecken und Seiten. Jede Fläche lässt sich mit $8 \cdot 9^2$ andern combiniren; welche 36 verschiedene Involutionen ihrer Regelschaaren hervorbringen. Von den $36 \cdot 52$ Doppelementen sind $36 \cdot 16$ solche niedrigerer Involutionen; die übrig bleibenden eigentlichen schneiden die B.-Quadrupel der mit ihr combinirten Flächen aus. Sie bestimmen wieder für die die Centrumstangente schneidende Schaar die Tangentialebenen an die Doppelemente $V^{(54)}$, welche sich auch direct aus den $V^{(18)}$ in Gruppen zu neun ableiten lassen.

Die Auffassung der Punktgruppen jeder derartigen Involution als Schnittpunktgruppe S der folgenden ergibt eine neue fortlaufende Involutionsreihe, deren Ordnungszahlen sich durch fortgesetzte Multiplication mit 9 aus einander ableiten. Die Elemente dieser Involutionen lassen sich stets in neun Gruppen G_i der vorhergehenden zusammenfassen, mit Wiederholung der Beziehungen zwischen neun Punkten einer Gruppe selbst und der Eigenschaft, dass die Erzeugenden der durch sie bestimmten Flächengruppen sich zu geschlossenen Polygonen von $2 \cdot 3^{k_1}$ Seiten zusammenfügen, wenn die Ordnung der Involution selbst 3^{2k_1} ist.

Die Gruppen der 3^{2k_1} Punkte sind zwar mit den Gruppen von neun Punkten nicht unmittelbar gegeben; ihre Construction erfordert aber keine andern Mittel, als diejenigen für ihre Partialgruppen, so dass wir sagen können, dass mit der Bestimmung der Involution von F.-Punkten des Sechsschlusses auch diejenige für den $2 \cdot 3^{k_1}$ -Schluss gegeben ist.

Kehren wir nochmals zur Involution des 18-Schlusses zu-

rück. Wenn wir in einer Gruppe von 81 Punkten dieser Involution drei Gruppen G_i vom Zusammenhang eines Dreiecks herausgreifen, so bestimmen ihre gegenseitigen Verbindungs-
linien drei Flächengruppen zu neun. Ein Dreieck der ersten Gruppe bestimmt drei Flächen der Gruppe G_1 , welche die Dreiecke der beiden andern einander paarweise zuordnen, so dass jedem Dreiecke von G_1 ein bestimmtes Dreieck von G_2 und G_3 entspricht. Durch diese Zuordnung entstehen auf jeder Fläche des Büschels drei verschiedene Involutionen neunter Ordnung; aber die Darstellung der neun Flächengruppen G_i von der ersten aus ist selber viermal möglich, so dass im Bilde die 81 Punkte einer Gruppe G mit jedem Punkte F der Curve zwölf verschiedene Involutionen neunter Ordnung und von jeder neun Gruppen bestimmen.

Denkt man jetzt die acht weitem Gruppen von 81 Punkten zugefügt, welche ein Element der folgenden Involution bilden, so ordnet jede der zwölf Involutionen von vorhin die acht andern Gruppen drei Mal in Paare, so dass aus jeder bekannten Involution drei neue abgeleitet werden, und somit allgemein eine Gruppe von 3^{2k_1} Punkten $4 \cdot 3^{k_1-1}$ verschiedene Involutionen von der Ordnung 3^{k_1} durch je 3^{k_1} Gruppen bestimmt; und weil jeder Punkt F mit $8 \cdot 3^{2(k_1-1)}$ andern combinirbar ist, so ergeben je $2 \cdot 3^{k_1-1}$ Punkte an F dieselbe Involution; die Strahlengruppe jeder folgenden Involution setzt sich aus drei Gruppen der vorhergehenden zusammen.

Die fortgesetzte Verbindung der B.-Quadrupel leitet aus jeder Involution eine neue Involutionen-Reihe ab, und in dem Aufbaue dieser Involutionen liegt zugleich die Einsicht in die Umkehrbarkeit der Transformation. Diese kann für jede Involution an der Gruppe der Punkte S ausgeführt werden, und nach der soeben abgeleiteten Zusammensetzung der Regelschaarinvolutionen gilt das Gesetz der Umkehrbarkeit der Transformation auch für diese.

Die Transformation der Involution für den $2 \cdot 2^k$ -Schluss in derjenigen für den $2 \cdot 3^{k_1}$ -Schluss und ihre umgekehrte führen zur Involution des $2 \cdot 2^k \cdot 3^{k_1}$ -Schlusses,

sie ist somit äquivalent einer Multiplication der Seitenzahl des Polygons mit 2^k resp. 3^{k_1} .

Mittelst der beiden beliebig weit sich fortsetzenden Involutions-Reihen aus dem Vier- und Sechsschlusse resp. als fundamentalen Involutionen sind durch ihre Combinationen zu zweien alle diejenigen erhältlich, welche zu einer Zahl n von der Form eines Productes aus den Primzahlpotenzen von 2 und 3 gehören. Ebenso lassen sich die Doppelemente oder die sich selbst entsprechenden Flächen der zusammengesetzten Involution aus denjenigen der Partialinvolutionen direct ableiten. Jedesmal besteht eine Gruppe, welche eine Doppelfläche enthält, nur aus solchen; ist die Involution von ungerader Ordnung, so tritt jedesmal eine der vier Kegelflächen in einer derartigen Gruppe auf. Die Anzahl der eigentlichen sich selbst entsprechenden Flächen für $n = 2^k \cdot 3^{k_1}$ ist somit

$$n_v = 2 \cdot (2^2 - 1)(3^2 - 1)2^{2(k-1)} \cdot 3^{2(k_1-1)}.$$

24. Wir sprechen diese Beziehungen, die ebenso gut räumlich weiter verfolgt werden könnten, für das Bild der Raumcurve aus, und geben den Zusammenhang der bis jetzt bekannten Punktinvolutionen der Curve dritter Ordnung für den Fall, dass die Ausgangsgruppe der zweiten Involutions-Reihe die Gruppe der Wendepunkte ist.

Weil jede Gruppe von neun F.-Punkten durch ihre sämtlichen Verbindungslinien zu ihrer Tangentialgruppe von genau denselben Eigenschaften führt, so folgt zunächst, dass die Gruppe der neun Wendepunkte mit ihrer Tangentialgruppe identisch ist, und dass diese Punkte somit zu dreien in zwölf Geraden liegen müssen. Diese Eigenschaft ist aber die Ursache einer ganzen Reihe interessanter Erscheinungen, welche unter der Bezeichnung der merkwürdigen Punktsysteme von Clebsch bekannt sind.

Construiren wir nämlich die acht weiteren Gruppen G_i , welche mit der Wendepunktsguppe F.-Punkte sind, für den Achtzehnschluss, so fällt auch diese nothwendig mit ihrer Tangentialgruppe zusammen, und da alle Gruppen G_i sich gegenseitig und unter einander gleichartig verhalten, so ist jede Gruppe G_i ihre eigene Tangentialgruppe, oder jede be-

steht aus drei Dreiecken, deren Seiten die Tangenten der C_3 in den Ecken sind. Solcher geschlossener Tangentendreiseite giebt es demnach 24. Wir wollen mit Clebsch acht solche Punkte nebst ihren Verbindungslinien ein System nennen; die Tangente jedes Systempunktes geht dann noch durch einen Punkt des Systems, und je zwei Dreiecke sind perspectivisch für das dritte; durch jeden Punkt gehen demnach drei Gerade, welche noch zwei weitere Punkte des Systems enthalten.

Alle acht Systeme zusammen bilden mit den neun Wendepunkten ein neues System, so dass die Tangente in jedem Systemspunkte wieder einen Punkt desselben enthält, und die Verbindungslinien zweier Gruppen von neun sich in einer dritten schneiden. Durch jeden Punkt des Systems, der nicht Wendepunkt ist, gehen 39 Gerade, welche noch zwei Punkte desselben enthalten; durch jeden Wendepunkt gehen 36 nach Paaren von Systems-Punkten, von denen keiner Wendepunkt ist.

Fasst man jetzt diese Gruppe von 81 Punkten als Gruppe G_i und construirt wieder die acht weiteren Ergänzungsgruppen zu einem Elemente der folgenden Involution, so hat man jetzt acht Systeme von 81 Punkten, mit genauer Wiederholung des vorigen Zusammenhanges, wenn man an Stelle der einzelnen Punkte Gruppen von je neun Punkten setzt.

Jede der acht Gruppen G_i besteht aus drei Gruppen von 27 Punkten, wobei diese 27 drei Gruppen von neun Punkten bilden, so beschaffen, dass man durch sämtliche Tangenten und Verbindungslinien der ersten zu Punkten der zweiten, durch ihre Tangenten und Verbindungslinien zur dritten und von dieser analog zur ersten zurückgelangt. In jeder Gruppe zu neun kommen, wenn sie überhaupt reell ist, drei reelle Punkte vor. Für diejenigen reellen, die zu einer Gruppe von 27 gehören, ist das Tangentialdreieck des ersten Dreiecks das zweite, sein Tangentialdreieck das dritte, das Tangentialdreieck des dritten wieder das erste Dreieck. Die neun reellen Punkte bilden demnach ein geschlossenes aus den neun Tangenten seiner Ecken bestehendes Tangentenneunseit. Solcher Polygone aus Tangenten giebt es im Ganzen 72; nur drei von ihnen sind reell.

Die 81 Punkte jedes Systems sind also so beschaffen, dass jeder Tangentialpunkt wieder ein Punkt des Systems ist und seine Tangente selbst einen weiteren Punkt desselben enthält. Je zwei Gruppen zu 27, die sich aus den Ecken geschlossener Tangentenneunseite zusammensetzen, sind für die dritte perspectivisch. Durch jeden Punkt gehen $\frac{81-3}{2}$ Gerade nach Paaren des Systems. Von den 1053 Geraden, welche drei Punkte verbinden, sind 729 solche, welche zwei Punkte aus derselben Gruppe von neun und 384 solche, welche drei Punkte aus drei verschiedenen solchen verbinden.

Die acht Gruppen können jetzt wieder zu einer einzigen vereinigt werden, und mit Ersetzung der bis jetzt betrachteten Gruppen durch allgemeine kann man diese Systeme folgendermassen zusammenfassen:

Es giebt ein System erster Art von 3^{2k_1} Punkten, welches alle neun Wendepunkte enthält; alle Punkte desselben ausser diesen haben die Eigenschaft, dass ihre Tangente noch einen Punkt des Systems enthält; durch jeden dieser Punkte gehen $\frac{3^{2k_1}-3}{2}$ Gerade nach Paaren von Systemspunkten. Im Ganzen giebt es $\frac{(3^{2k_1}-3)(3^{2k_1}-9)}{6}$ Gerade, welche drei Punkte des Systems enthalten. Dazu kommen durch jeden Wendepunkt $\frac{3^{2k_1}-1}{2}$ Gerade nach zwei Punkten des Systems.

Es giebt im Weiteren acht Systeme zweiter Art, welche keinen Wendepunkt enthalten, und wieder enthält die Tangente jedes Punktes einen weiteren Punkt des Systems. Durch jeden derselben gehen $\frac{3^{2k_1}-3}{2}$ Gerade, welche drei Punkte des Systems enthalten, die Zahl dieser Geraden ist $\frac{3^{2k_1}(3^{2k_1}-3)}{6}$. Jedes System besteht aus 3^{k_1} geschlossenen Tangentenpolygonen von 3^{k_1} Seiten und Ecken. Ihre Gesamtzahl ist $8 \cdot 3^{k_1}$. Die acht Systeme zweiter Art bilden zusammen mit demjenigen erster Art ein neues System der ersten Art von $3^{2(k_1+1)}$ Elementen.

25. Zu Systemen analoger Art gelangt man, wenn die Gruppe von 2^{2k} F.-Punkten von einem oder von allen drei Wendepunkten aus dargestellt wird.

Nehmen wir zunächst den ersten Fall. Diejenige der vier Untergruppen, welche den Wendepunkt enthält, ist die gemeinschaftliche Tangentialgruppe der drei andern, welche mit einander perspectivisch liegen, und ihre eigene Tangentialgruppe. Diese neun Systeme, welche so an jedem Wendepunkte entstehen, bilden zusammen ein neues System, und je drei Gruppen, welche aus drei Wendepunkten in gerader Linie entstanden sind, sind selbst perspectivisch.

Für die Viererinvolution folgt beispielsweise: Von den 351 Geraden zwischen den 27 Berührungspunkten J der Tangenten aus den Wendepunkten enthalten 81 je drei Punkte J und zählen dreifach; 108 je zwei Punkte J und einen Wendepunkt. Unter diesen Geraden sind 54 Projectionen von Linien g , 27 davon gehen durch einen Wendepunkt, 27 andere enthalten je drei Punkte J oder sind die neun harmonischen Polaren i , die andern 27 die aus den Wendepunkten gelegten Tangenten.

Die Erweiterung der Punktgruppen der Systeme beider Arten in der Involution des $2 \cdot 2^k$ -Schlusses liefert keine neuen Tangentenpolygone, weil die neu hinzutretenden Gruppen mit den alten dieselbe Tangentialgruppe, d. h. diese selbst als solche besitzen; doch entstehen dadurch zwei neue Arten von Systemen, die sich folgendermassen kurz beschreiben lassen: Ist m eine Zahl von der Form $2^k \cdot 3^{k_1}$, so entsteht aus dem Systeme erster Art ein neues mit m^2 Punkten, worunter die neun Wendepunkte; $\frac{m^2}{4}$ Punkte, die Wendepunkte inbegriffen, haben die Eigenschaft, dass ihre Tangente noch einen Punkt des Systems enthält, und dass sie selbst Schnittpunkte von vier Tangenten sind. Durch jeden Wendepunkt gehen $\frac{m^2 - 4}{2}$ Gerade nach Punktepaaren des Systems, von $\frac{m^2}{4} - 9$ andern Punkten aus je $\frac{m^2 - 6}{2}$, endlich von $\frac{3m^2}{4}$ Punkten aus

je $\frac{m^2-2}{2}$ Gerade, welche noch zwei Systemspunkte enthalten.

Somit giebt es $\frac{m^4-3m^2+18}{6}$ Gerade mit drei Systemspunkten.

Dieses System umfasst die acht Systeme ohne Wendepunkte; von den $\frac{m^2}{4}$ Punkten eines solchen aus gehen wieder $\frac{m^2-6}{2}$ und von $\frac{3m^2}{4}$ solchen gehen $\frac{m^2-2}{2}$ Gerade aus, welche noch zwei Punkte des Systems enthalten, so dass die Gesamtzahl der Geraden mit drei Systemspunkten $\frac{m^2(m^2-3)}{6}$ ist. Es ist nur ein anderer Ausdruck dieser Beziehungen, wenn wir sagen:

Alle Punkte, welche mit einem Wendepunkte F.-Punkte sind für die Zahl $3m$ (wo m zunächst die Form $2^k \cdot 3^{k_1}$ besitzt), haben die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie von zweien derselben einen dritten Punkt derselben Eigenschaft enthalten kann. Dieser kann aber auch ein Wendepunkt oder ein zu kleineren Zahlen k und k_1 gehörender Punkt sein.

Oder: Zu allen Punkten, welche mit einem Wendepunkte F.-Punkte sind für die Zahl $3m$, gehören Punktgruppen, welche mit ihnen F.-Punkte sind für die Zahl m , die zu dreien in Geraden liegen können.

VII.

26. Die abgeleiteten Beziehungen zwischen den beiden Involutions-Reihen bestehen im Bilde unverändert fort für die zweitheilige Raumcurve im Büschel mit vier nicht reellen Kegelflächen, nur mit anderer Interpretation der räumlichen Verhältnisse. Die neun Punkte einer Gruppe liegen je auf demselben Aste, mit dem vierten Schnittpunkte S der Ebene ihrer Dreiecke auf dem andern; weil aber im Bilde das Tangentialdreieck jedes der zwölf Dreiecke auf dem unendlichen Aste liegt, so kann es keine reelle Seite eines solchen durch den Punkt S_i^c geben, und analog für alle aus solchen Gruppen der Zahl 3^{k_1} zusammengesetzten Punktinvolutionen, d. h. die sich selbst entsprechenden Flächen der zweiten In-

volutionen-Reihe können nicht mehr reell sein. In der That muss jede derartige Flächengruppe eine Kegelfläche, und muss das Erzeugniss ihrer Regelschaarinvolutionen einen in einer Tetraederebene P_i gelegenen Kegelschnitt enthalten; sie können also nicht reell sein.

Hat die Raumcurve nur zwei reelle doppeltprojicirende Kegel, so bleiben die Realitätsverhältnisse der zweiten Involutionen-Reihe fortbestehen; von den sich selbst entsprechenden Flächen werden jedesmal die Hälfte von den reellen der entsprechenden Zahl im Büschel mit vier reellen Kegeln imaginär, weil sie sich stets als Vierergruppen darstellen lassen.

Besitzt die Raumcurve in M_3 einen Doppelpunkt, so entspricht dem Büschel der Tangentialebenen am Scheitel S_2 der R_4 eine parabolische Involution von Tangentialebenen an der Kante M_1M_2 , und wir erhalten an Stelle des Kegels K^* als Erzeugniss eine Ebene durch die Kante M_1M_3 . Sie schneidet den Kegel aus M_1 in einer zweiten Erzeugenden und bestimmt damit das einzige Paar von Flächen $V^{(6)}$, welche in diesem Falle auftreten. Von den neun Punkten jeder Gruppe bleiben also drei: die Flächeninvolution ist von der dritten Ordnung, also für den $2m$ -Schluss (m Bedeutung wie bis anhin) von der Ordnung m . Jeder Punkt kann mit $(2-1)(3-1)2^{k-1} \cdot 3^{k_1-1}$ andern combinirt werden; diese Zahl ist zugleich die Anzahl der sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(2m)}$.

Im Falle der Curve mit eigentlichem Knoten, wie in Taf. III, Fig. 2, ist von den drei Punkten jeder Gruppe je nur einer reell, von jeder Flächengruppe also je nur eine hyperbolisch. Eine beliebige Ebene durch M_1M_2 , also von der Spur h durch S_{12} , definirt als Tangentialebene eine bestimmte Fläche des Büschels. Sie begegnet der Raumcurve in vier Punkten mit den Bildern F und F' , welche paarweise verbunden der C_3 in einem dritten Punkte begegnen, für welche die Verbindungslinie durch S_i^c geht und die Spur der projicirenden Tangentialebene an die betrachtete Fläche ist. Als solche schneidet sie die Linie h in einem Punkte der Spur s^K , welche ihrerseits durch den zweiten Schnittpunkt auf L_1 die

Spur h^* der Ebene durch $M_1 M_2$ bestimmt, nach deren Schnittpunkten im Raume mit der R_4 die projecirenden Tangentialebenen der Flächen $V^{(6)}$ gehen. Ist S_i^c der reelle Wendepunkt J_1 , so enthält eine der beiden Spuren dieser Ebenen die beiden andern Wendepunkte J_2 und J_3 . Nur im Falle der Curve mit isolirtem Doppelpunkte sind die $V^{(6)}$ hyperbolisch und alle drei Wendepunkte reell.

27. a) Für den Fall der Raumcurve dritter Ordnung und eine ihrer Doppelsekanten l wird die Involution dritter Ordnung sehr übersichtlich gebildet durch die Berührungspunkte der Gruppen von je drei Schmiegungebenen an die R_3 aus den Punkten S der Geraden l . In der Projection entstehen Gruppen von je drei Punkten, specielle Pascalsechsecke auf dem Kreise K' , für welche sich die Tangenten in den Ecken mit den Gegenseiten auf Punkten der Geraden l' schneiden, welche also die Pascallinie ist. Sie sind nur reell, wenn die Gerade l' den Kreis nicht reell trifft, also l eine imaginär schneidende Doppelsekante der R_3 ist. Auf K' und l' entstehen die Möbius'schen Involutionen dritter Ordnung, je zwei Gruppen derselben sind drei Paare der quadratischen Involution, der wir schon begegnet sind; ihre Doppelemente sind sämmtlich durch das Schnittpunktpaar von l' mit K' dargestellt.

Die allgemeine Involution für den $2m$ -Schluss ist von der Ordnung m ; auch für diese stellen jene beiden Punkte die Gesammtheit der Doppelemente dar, und weil der Punkt S_i^c auf dem Kreise liegt, so werden auch für diese Involutionen die Doppelemente oder Flächen $V^{(2m)}$ durch das Paar der doppeltprojecirenden Kegelflächen aus M_1 und M_2 vertreten.

27. b) Wir haben bei andern räumlichen Verhältnissen dieselben Beziehungen im Bilde der Degenerationsform in zwei Kegelschnitte. In Taf. IV Fig. 2, haben wir am Punkte S_{12} eine Strahleninvolution dritter Ordnung nach den Ecken aller Dreiecke, welche dem mit L_1 concentrischen Kreise U_3 um- und L_1 eingeschrieben sind, und welche im Spurbüschel an der Kante $M_1 M_2$ die cubische Involution bestimmen, deren Ebenen zu je vier Dreiecken $N_1 N_2 N_3$ im Bilde führen. Die

Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Pole P' der Spur p' der projicirenden Ebene der Durchdringung führt jedesmal auf ein zweites derartiges Dreieck, dessen Punkte mit einem der drei andern Paare von F.-Punkten für den Zwölfschluss bilden. Wieder ist die Involution des $2m$ -Schlusses von der Ordnung m , aber weil jetzt der Punkt S_t^c auf p' (unendlich fern) liegt, so treten eigentliche $2m$ -Schlussflächen auf.

In diesem wie im vorigen Falle umhüllen die Sehnen aller Punktgruppen zu m auf dem Kegelschnitte K' je $\frac{m-2}{2}$ Kegelschnitte; sie sind mit K' die centrisch collinearen Umformungen des Systems concentrischer Kreise, welche von den Sehnen aller regulären m -Ecke des Kreises L_1 umhüllt werden: für M_1' als Centrum, die Spur s der Ebene des Durchdringungs-Kegelschnittes K als Axe und die Spur p' als einer Gegenaxe. Sie sind also sämmtlich in doppelter Berührung mit K' für diese Gegenaxe als gemeinschaftlicher Berührungssehne.

Jeder Punkt kann mit $(2-1)(3-1)2^{k-1} \cdot 3^{k_1-1}$ andern Punkten als F.-Punkten für die Zahl m combinirt werden; ebenso gross ist die Zahl der eigentlichen $2m$ -Schlussflächen und die doppelte Anzahl aller Kegelschnitte, denen Polygone von $2m$ Seiten umschrieben sind und deren zu p' parallele Tangenten die Spuren $s_v^{(2m)}$ der projicirenden Tangentialebenen an die Flächen $V^{(2m)}$ sind.

28. Bis dahin war die Untersuchung des Flächenbüschels geführt worden für ein Centrum auf der Grundcurve und somit für die allgemeine oder specielle Curve dritter Ordnung als Bild. Mit der allgemeinen Lage des Centrums im Raume erscheint die Raumcurve in der Projection als die Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, oder vom Geschlechte Eins. Alle Flächeninvolutionen erscheinen als solche in einem Systeme einfach unendlich vieler, vierfach berührender Kegelschnitte des Umrissystems, derart, dass je m Tangenten des einen Kegelschnittes sich mit m Tangenten eines andern in einer bestimmten Gruppe von m^2 solchen zu geschlossenen, der Curve vierter Ordnung eingeschriebenen, Po-

lygonen von $2m$ Seiten zusammenfügen. Die sich selbst entsprechenden Flächen $V^{(2m)}$ stellen sich dabei als Vereinigung zweier solcher Kegelschnitte dar, welche für sich allein Träger von solchen Polygonen sind. Einer der beiden Kegelschnitte eines Paares kann in eine Strahleninvolution m^{ter} Ordnung an einem der Doppelpunkte übergehen, wenn die eine der betrachteten Flächen diejenige ist, welche das Centrum enthält; und beide Kegelschnitte ersetzen sich durch projectivische Strahleninvolutionen aus den Doppelpunkten der Curve vierter Ordnung, wenn insbesondere das Centrum auf einer sich selbst entsprechenden Fläche $V^{(2m)}$ gelegen ist. Demnach gilt der Steiner'sche Satz:

Wenn einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten als F.-Punkten ein einziges geschlossenes Polygon sich einschreiben lässt, so giebt es unendlich viele, und jeder Punkt der Curve ist Ausgangspunkt eines solchen.

Die Projection der Flächeninvolution in den Specialfällen ergiebt die analogen Beziehungen für die unicursale Curve vierter Ordnung, für die Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt und Spitze, und für ein Paar von Kegelschnitten. Mit jeder speciellen Lage des Centrums ist ein Specialfall und eine Specialform der Curven dritter und vierter Ordnung vom Geschlecht Null und Eins und der Tangentialinvolutionen ihres Kegelschnittsystems verbunden; für die Lage des Centrums in einer Kegelspitze M_i erhalten wir die Lösung des Poncelet'schen Schliessungsproblems bei Kegelschnitten.

VIII.

Die vorliegenden Betrachtungen beschränken sich auf die Aufstellung und die Construction der F.-Punktgruppen Steiner'scher Polygone, deren Seitenzahl sich aus Potenzen der Primzahlen 2 und 3 zusammensetzen und den gegenseitigen Beziehungen solcher Gruppen. Die Aufstellung aller Primzahlinvolutionen und ihrer Combinationen, d. h. die Involution für die allgemeine Zahl n schliesst sich daran an,

mit der Einsicht, dass das bis jetzt aufgestellte Transformationsgesetz allgemeine Gültigkeit besitzt und den eigentlichen Charakter aller Steiner'schen Involutionen auf der Curve dritter Ordnung bezeichnet. Die Involutions-Reihen für $n = 2^k$ behalten dabei den andern Primzahlinvolutionen gegenüber die schon hervorgetretene Sonderstellung bei, in gewissem Betrachte auch die Reihe für die Zahlen $n = 3^{k_1}$. Aber die Durchführung dieser Fragen mit den Clebsch'schen Punktsystemen und den geschlossenen Tangentenpolygonen allgemeinerer Art als die bis jetzt aufgetretenen, geht über den Rahmen der hier gestellten Aufgabe hinaus und soll bei nächster Gelegenheit ergänzt werden. Hier beschränken wir uns darauf, noch in einer Anwendung die Bedeutung der Involution des Sechsschlusses für die Curve dritter Ordnung hervortreten zu lassen.

29. Betrachten wir drei beliebige Punkte A, B, C der Raumcurve R_4 und verbinden wir diese mit einem beliebigen vierten Punkte D durch die Erzeugenden a, b, c dreier Hyperboloide, construiren wir dann die vierten Schnittpunkte A', B', C' der drei Ebenen durch D nach dem Dreiecke ABC , so dass A' in BCD , B' in ACD und C' in ABD liegen, legen wir ferner durch diese neuen Punkte die Erzeugenden a_1, b_1, c_1 derselben Hyperboloide und derselben Schaar, so schneiden sich diese in einem neuen Punkte D' der Curve und die Ebene $A'B'D'$ enthält den Punkt C , $A'C'D'$ den Punkt B und $B'C'D'$ den Punkt A . Im Allgemeinen liegt D' nicht in ABC und D nicht in $A'B'C'$. Es ist jedoch leicht zu bewerkstelligen, dass dies auch noch eintritt.

Wählen wir nämlich drei der Punkte, in welchen eine beliebige Ebene die R_4 schneidet, als Punkte A, B, C , den vierten als D' und gehen wir mittelst vier Linien g zu vier Punkten A', B', C', D' über, so dass alle vier dasselbe Gegenkantenpaar im Poltetraeder schneiden, so sind $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einander um- und eingeschriebene Tetraeder, und weil die Ausgangsebene ABC ganz willkürlich war, offenbar allgemeinsten Art. Je zwei Gerade mit denselben gestrichenen und ungestrichenen Buchstaben liegen als Linien g auf derselben Fläche.

Wir setzen für die folgende Betrachtung zwei Tetraeder von allgemeiner Lage, also D nicht in $A'B'C'$ voraus. Legen wir nun um die Gerade CD nach einem beweglichen Punkte E der Curve die Ebenen, so schneiden diese jeweilen einen zweiten Punkt E' aus dieser, und die Geraden EE' erfüllen das durch CD bestimmte Hyperboloid. Die Ebenen aus dem vierten Schnittpunkte C' der Ebene ABD nach diesen Geraden bilden also ein Büschel um die Kante $C'D'$. Nun bestimmen die vier Geraden $abce$ aus D nach $ABCE$ für jeden Punkt E ein Büschel von Kegelflächen zweiten Grades, für welches das Ebenenpaar ABD und CDE eine degenerirte Fläche ist. Jeder Kegel trifft die R_4 in einem Punktepaare F, G ; die Linien FG erfüllen für alle Kegelflächen eines Büschels je ein Hyperboloid, das offenbar die Gerade $C'E'$ enthält. Die Ebenen EFG liegen daher in einem Büschel, welches auch die Ebene CEE' enthält, d. h. alle Ebenen gehen für jedes Büschel von Kegelflächen durch den Punkt D' . Wir sehen somit:

Legt man aus einem beliebigen Punkte D der Raumcurve R_4 nach drei willkürlichen ihrer Punkte ABC das Netz von Kegelflächen zweiter Ordnung, so schneidet jede derselben die Curve in drei weiteren Punkten EFG , deren Ebenen der Curve stets im nämlichen vierten Punkte D' begegnen.

Durch den Punkt D' gehen drei reelle und sechs nicht reelle Schmiegungebenen der Raumcurve; in dem Netze der Kegelflächen giebt es demnach drei reelle und sechs nicht reelle Flächen K , welche die R_4 osculiren. Da die neun Osculationspunkte zu dreien mit dem Punkte D' in zwölf Ebenen liegen, von denen vier reell und acht imaginär sind, welche sich in vier Systeme so gruppiren, dass jedes eine reelle und zwei nicht reelle enthält, so folgt:

Die drei Osculationserzeugenden dreier Kegel K liegen mit den drei festen Strahlen abc in einer Kegelfläche K_1 oder liegen im Netz; solcher Kegel K_1 giebt es zwölf; sie gruppiren sich in vier Systeme zu dreien, welche alle neun Osculationskanten enthalten; in je-

dem Systeme ist ein Kegel K_1 reell, die beiden andern sind imaginär.

Die neun Osculationspunkte sind durch den Punkt D' allein bestimmt, sowie alle acht übrigen durch jeden neunten unter ihnen. Alle Veränderungen innerhalb der drei Punkte ABC , welche den Punkt D' ungeändert lassen, lassen auch das System der neun Osculationspunkte ungeändert. Nehmen wir nun irgend eine Ebene dreier Punkte EFG durch D' und bestimmen das Netz von Kegelflächen aus D durch diese, so schneidet jede derselben drei Punkte des Systems ABC heraus; denn die durch abc und efg gegebenen Netze haben eine Kegelfläche gemein, diese bestimmt eine Ebene ABC und damit den vierten Schnittpunkt S aller übrigen Ebenen ABC . Wir haben also zwei Systeme von je zweifach unendlich vielen Punktetripeln ABC und EFG , und die sechs projecirenden Strahlen nach irgend zwei solchen liegen stets in einer Kegelfläche zweiten Grades.

Das Osculationssystem bleibt somit ungeändert, wenn von den Kanten abc sich eine oder alle drei ändern, wenn aber zwei sich ändern, so kann die Ebene ABC nicht mehr durch S gehen und es ändert sich auch der Punkt D' . Da von den neun Osculationspunkten je drei in einer Ebene durch D' liegen, so wird das System der abc auch herausgeschnitten von dem Netze der Kegelflächen, das durch drei der Osculationsstrahlen bestimmt ist und endlich, da die Schmiegungebene in den Osculationspunkten durch D' geht, als Schnittsystem aller sich nach einer Osculationskante osculirenden Kegelflächen.

Fassen wir die drei Ebenen aus einer Osculationskante nach drei Strahlen abc als Kegelfläche dritter Ordnung auf, so enthält der zugehörige osculirende Kegel des Systems durch abc sechs der gemeinschaftlichen neun Kanten des mit dem projecirenden Kegel K_3 bestimmten Büschels dritter Ordnung, und die drei übrigen Kanten, welche jene drei Ebenen noch aus dem Kegel K_3 schneiden, liegen daher in einer Ebene.

Jede Ebene des projecirenden Bündels führt also durch die Verbindungsebenen der drei Strahlen, nach

welchen sie den projicirenden Kegel dritter Ordnung schneidet, mit einer der neun Osculationskanten zu drei Strahlen des Systems abc und umgekehrt.

Durch den Schnittpunkt S gehen aber ebenfalls neun Schmiegungeebenen; es giebt daher durch je drei Osculationskanten des ersten Systems — wir bezeichnen seine drei reellen mit r, s, t — neun Kegelflächen zweiter Ordnung, welche den Kegel dritter Ordnung osculiren nach einer Kante eines zweiten Systems von genau derselben Beschaffenheit. Die drei reellen Osculationskanten dieses zweiten seien mit r_1, s_1, t_1 bezeichnet. Zwischen den beiden Systemen finden Beziehungen statt, welche wir folgendermassen ausdrücken können:

Durch die neun Kanten des ersten Systems gehen zwölf Mal neun Kegelflächen K_1 , durch je drei derselben neun, welche je in einer Kante des zweiten Systems osculiren und umgekehrt; je drei Strahlen des ersten Systems liegen mit drei Strahlen des zweiten in einer Kegelfläche K_0 ; insbesondere giebt es 81 Kegelflächen K_2 , welche in einer Kante des ersten und einer Kante des zweiten Systems osculiren.

Nach dem oben angegebenen Satze haben die drei Elemente der Flächeninvolution neunter Ordnung, welche durch die Verbindung dreier Punkte ABC einer Ebene durch S mit den neun Punkten des ersten Osculationssystems entstehen, die Eigenschaft, dass jede Ebene, welche die projicirenden Strahlen der beiden ersten Gruppen enthält, auch den der dritten Gruppe aufnimmt. Verbindet man also jetzt die beiden Osculationssysteme, so entsteht ein einziges Element der Flächeninvolution neunter Ordnung, d. h. die obigen drei Gruppen sind unendlich benachbart, die drei projicirenden Strahlengruppen ebenfalls, und da je drei unendlich benachbarte in einer Ebene liegen müssen, so ist das System der neun projicirenden Strahlen dieser Gruppe das der neun Wendestrahlen des Kegels K_3 , d. h.:

Die Verbindungsebenen der neun Strahlen des einen Osculationssystems mit denen des zweiten schneiden sich zu neun in dem Systeme der neun Wendegeraden des projicirenden Kegels der Curve.

Es folgt daraus, dass die Verbindungslinien je zwei solcher Punktegruppen R, S, T und R_1, S_1, T_1 der Curve stets auf derjenigen Flächengruppe zu neun liegen, welche durch die Verbindung des Centrums mit den Berührungspunkten der projicirenden Schmiegungebenen bestimmt ist. Durch das eine Osculationssystem ist das andere also vollständig bestimmt. Eine beliebige Erzeugende auf einer dieser neun Flächen bestimmt zwei Punkte R und R_1 der zwei Osculationssysteme und die Schmiegungebenen in ihnen schneiden die Punkte D' und S resp. heraus. Diese fallen also zusammen, wenn die betrachtete Erzeugende zwei Punkte eines Dreiecks verbindet. Aber diese sind Verbindungsgerade von Punkten der neun B.-Quadrupel, die Schnittpunkte der Schmiegungebenen somit die drei Punkte, welche das Projections-Centrum zum Quadrupel ergänzen. Daraus folgt, dass die Verbindungsgeraden der zusammenfallenden Punkte D', S die Tangenten sind, welche auf dem durch die Centrumstangente bestimmten Hyperboloid H^c liegen und sie nicht schneiden, und dass die Verbindungsgeraden $D'S$ überhaupt stets Erzeugende dieses Hyperboloids bleiben.

Wir haben somit jetzt den Fall der einander um- und eingeschriebenen Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$, wo in der That D' und D als Punkte desselben Quadrupels erhalten werden.

Da die neun Osculationspunkte jedes Systems für den allgemeinen Fall Punkte von zwölf Dreiecken sind, so haben die projicirenden Tripel r, s, t und r_1, s_1, t_1 die bekannte Eigenschaft, dass die Tangentialebenen der Kanten sich mit den Gegenebenen in Erzeugenden des projicirenden Kegels K_3 schneiden, und dass diese Kanten sich zu Tripeln analoger Beschaffenheit zusammensetzen. Diese Strahlen sind die projicirenden für diejenigen beiden Flächengruppen der Involution, die aus der Verbindung des Centrums mit den Gruppen R, S, T und R_1, S_1, T_1 resp. entstehen; sie gehen daher nach zwei Punktegruppen, die aus einem Paare entsprechender Punkte D' und S hervorgehen, und es wiederholen sich somit für diese die sämtlichen Eigenschaften der beiden Systeme R, S, T und R_1, S_1, T_1 .

Die Punkte D' und S können speciell in dem Projectionscentrum zusammenfallen, alle Kegelflächen durch ABC und EFG bestehen dann aus Ebenenpaaren, und die beiden Systeme r, s, t und r_1, s_1, t_1 vereinigen sich in dem Systeme der Wendestrahlen u. s. f.

Alle beispielsweise in r osculirenden Kegelflächen schneiden aus der Curve Systeme ABC heraus. Diejenige Kegelfläche, die der Ebene durch S angehört, welche die Tangente der Raumcurve im Punkte R enthält, berührt den projicirenden Kegel nach r fünfstrahlig. Der sechste Strahl geht nach dem vierten Schnittpunkte der Ebene und der Curve.

Betrachten wir nun speciell eines der drei Systeme, für welche S und D' zusammenfallen. Dann ist das System der ABC mit dem der EFG identisch; die Punkte R, S, T und R_1, S_1, T_1 fallen zusammen. Nach jedem der drei Strahlen r, s, t wird der projicirende Kegel von acht Kegeln zweiter Ordnung osculirt, welche noch je drei der neun Strahlen enthalten; von vier Kegeln vierstrahlig, welche noch je zwei enthalten, und von einem Kegel sechsstrahlig berührt. Dies letztere muss thatsächlich eintreten, weil jetzt die Schmiegungebene in R auch durch S und diejenige in R_1 auch durch D' geht. Da die Strahlen r, s, t für jedes der drei Systeme die Strahlen nach den Quadrupelpunkten derjenigen Curvenpunkte sind, für welche die Schmiegungebenen projicirend sind, so sind diese drei Systeme sechsstrahliger Berührung die 27 Berührungserzeugenden der Tangentialebenen, welche man aus den neun Wendekanten des Kegels K_3 an diesen legen kann.

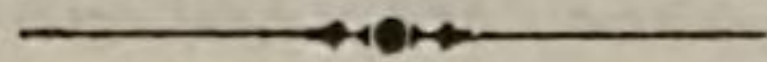
Jedes Tripel von drei Strahlen abc kann gleichzeitig als Tripel dreier Strahlen efg aufgefasst werden, nach drei solchen Strahlen kann also der Kegel K_3 von einem Kegel zweiter Ordnung berührt werden und es ergeben sich somit drei Systeme dreifach berührender Kegelflächen. Die Berührungserzeugenden von je zwei solchen liegen selbst in einer Kegelfläche zweiter Ordnung. Durch je zwei Berührungserzeugende gehen drei Kegelflächen, welche noch in einer dritten Kante berühren. Unter allen giebt es drei Systeme von je einfach

unendlich vielen, welche ein Mal zweistrahlig und ein Mal vierstrahlig, 27 welche sechsstrahlig berühren. Hält man einen Berührungsstrahl fest, so liegen die jedesmaligen beiden andern in Ebenen dreier Büschel. Construiert man zu drei Punkten einer Ebene durch D' die fünfstrahlig berührenden Kegelflächen, so liegen die sechsten Schnittpunkte in einer Ebene durch S also D' , d. h. die sechs Punkte auf Strahlen einer Kegelfläche. Dadurch entstehen an D' zwei projectivische Büschel, die gemeinsamen Elemente führen zu Gruppen von je drei Strahlen eines dreifach berührenden Kegels, so dass der fünfstrahlig berührende Kegel in jedem der drei Strahlen noch durch einen der beiden andern geht.

Speciell folgt für unsere vorliegende circulare Curve dritter Ordnung, dass durch jeden Punkt derselben drei reelle und sechs nicht reelle Osculationskreise gehen, deren neun Osculationspunkte mit dem gemeinsamen Schnittpunkte in vier Systemen von drei Kreisen liegen. Der Kreis durch je drei Punkte eines Dreiecks schneidet somit die C_3 im gemeinschaftlichen Schnittpunkte seiner drei Osculationskreise u. s. f.

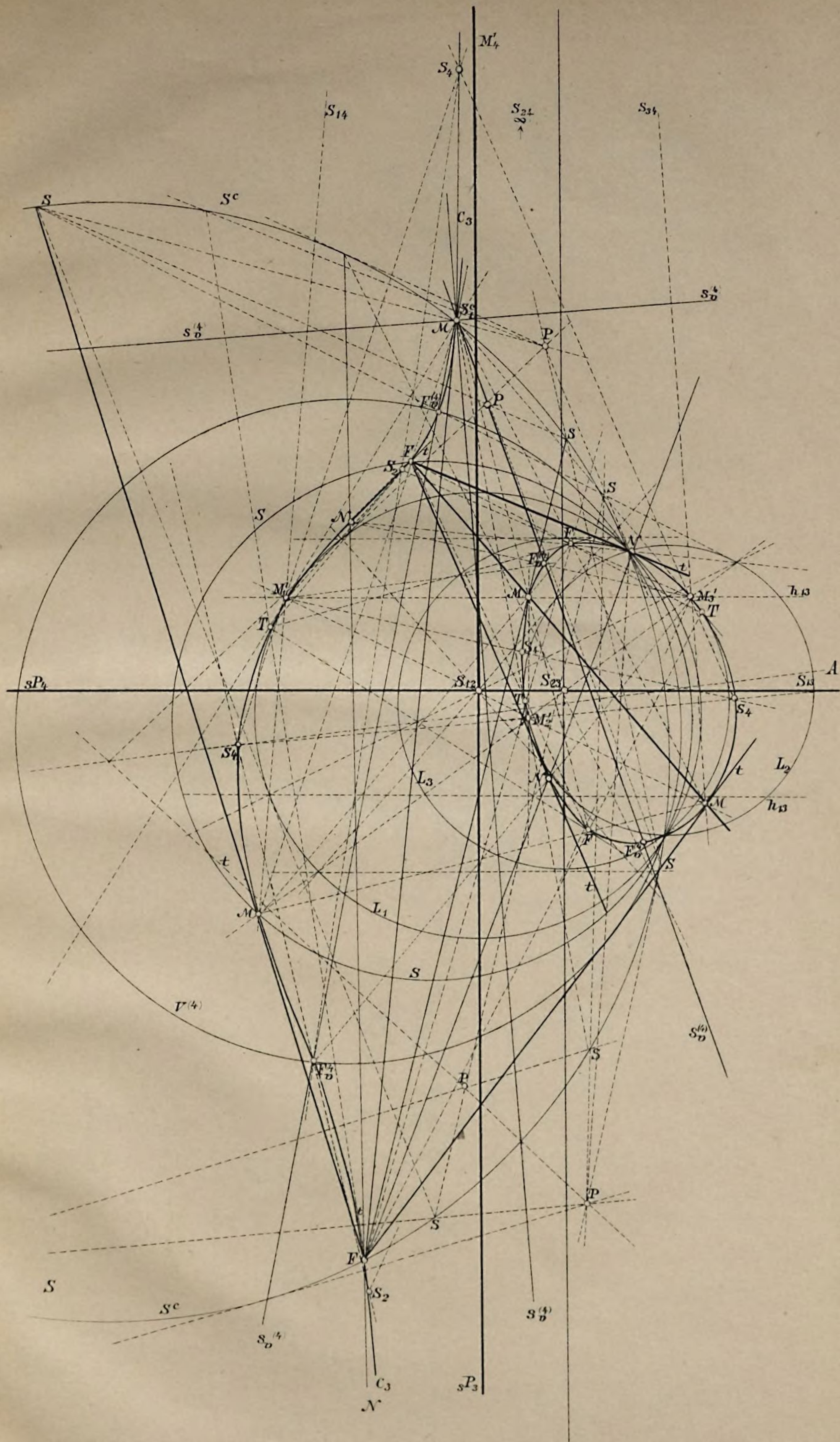
30. Schneidet man das Projectionssystem der vorigen Untersuchung mit einer beliebigen Ebene und spricht man die räumlichen Constructionen für das Schnittsystem aus, so hat man im Wesentlichen die Sätze der zweiten Steiner'schen Mittheilung (Steiner: „Werke“ Bd. II p. 377 ff.) Aber auch die von Steiner am Schlusse der Eingangs citirten ersten Mittheilung gegebene Bemerkung, dass die geradlinigen Seiten der Polygone durch Kegelschnitte ersetzt werden können, lässt sich räumlich leicht bestätigen: Verbindet man drei beliebige Punkte der Raumcurve R_4 mit dem Centrum, so schneiden sämtliche durch diese Geraden gehenden Kegelflächen zweiter Ordnung aus dem Centrum die R_4 in drei Punkten einer Ebene mit stets demselben vierten Schnittpunkt. Legt man ferner nach zwei beliebigen Punkten F_1 und F_2 der R_4 die projecirenden Strahlen, so bestimmen diese mit den drei ersten zwei Büschel von Kegelflächen, jede derselben begegnet der R_4 in zwei variablen Punkten, deren Verbindungslinien für das erste Büschel stets DF_1 , für das

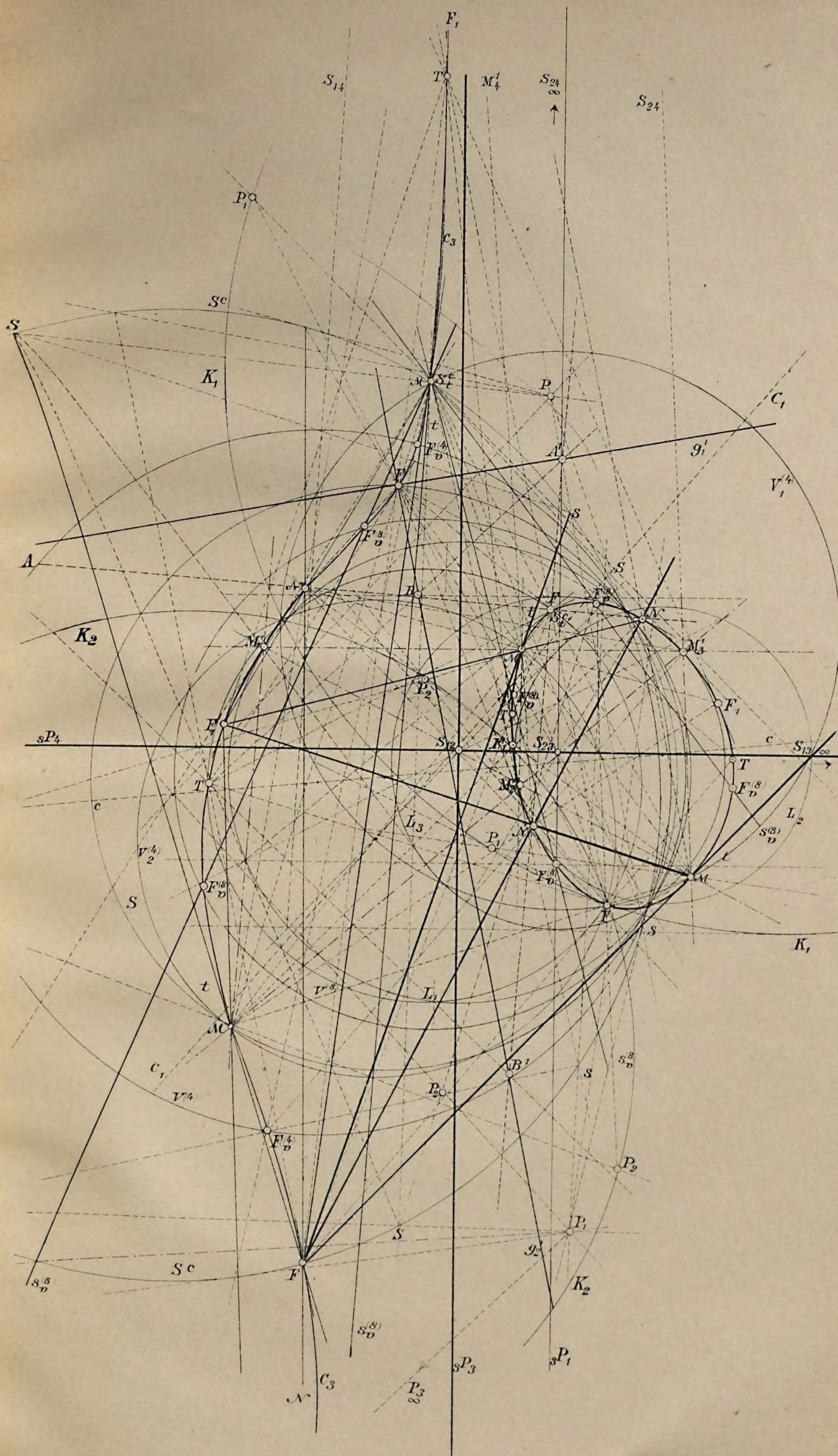
zweite stets DF_2 schneiden. Sind nun F_1 und F_2 F.-Punkte, so bestimmen die Geraden DF_1 und DF_2 zwei Flächen einer Gruppe für den $2n$ -Schluss. Fasst man also auf diesen Flächen mittelst der Regelschaaren, welche die Geraden DF_1 und DF_2 schneiden, ein geschlossenes Polygon in's Auge, so gehen die Ebenen aus D nach dessen Seiten abwechselnd durch die Punkte F_1 und F_2 ; jede dieser Ebenen aber bestimmt eine Kegelfläche durch die drei willkürlichen Strahlen abc und einen der projecirenden Strahlen nach F_1 und F_2 , welche paarweise die Ecken eines Steiner'schen Polygons enthalten.



Erklärung der Tafeln.

- Tafel I. Durchdringung mit vier reellen Kegeln als circulare, zweitheilige Curve dritter Ordnung im Bild. Darstellung des Involutionselementes des Vierschlusses und der Doppelflächen $V^{(4)}$.
- „ II. Die circulare, zweitheilige Curve dritter Ordnung als Bild der Grundcurve eines Büschels mit vier reellen und eines solchen mit vier nicht reellen Kegelflächen. Darstellung eines Involutionselementes des Achtschlusses und der Doppelflächen $V^{(8)}$.
- „ III. Fig. 1. Durchdringung mit zwei reellen Kegeln: circulares einheitliches Curvenbild. Darstellung des Involutionselementes des Vierschlusses und der Flächen $V^{(4)}$. — Fig. 2. Durchdringung mit Doppelpunkt aus der einfachen Berührung der Kegel. Involutionselement des Vierschlusses und Construction der Geraden durch die drei Wendepunkte des rationalen Curvenbildes.
- „ IV. Fig. 1. Die Raumcurve dritter Ordnung vom Kreisbilde K' mit Bisecante l . Quadratische Involution des Vierschlusses. — Fig. 2. Durchdringung als Kegelschnittpaar. Darstellung der Elemente der quadratischen und cubischen Möbius'schen Involutionen auf dem Kegelschnitt K' und auf der Geraden p' des Curvenbildes.
- „ V. Durchdringung mit vier reellen Kegeln. Construction der Doppelflächen $V^{(6)}$ und Darstellung der Wendepunkte, des Systems der Linien h durch diese und der harmonischen Polaren i des Curvenbildes für einen Scheitel der Curve R_4 als Centrum. Büschel der Polarkegelschnitte der Punkte der Geraden g' im Bild.
- „ VI. Dieselbe Durchdringung bei allgemeiner Lage des Centrums auf der Curve. Darstellung des Involutionselementes des Sechs- und Zwölfschlusses mittelst des Umrisskegels U_3 . (Die Construction der zugehörigen Flächen $V^{(12)}$ ist mit der vorigen Tafel verbunden.)
-





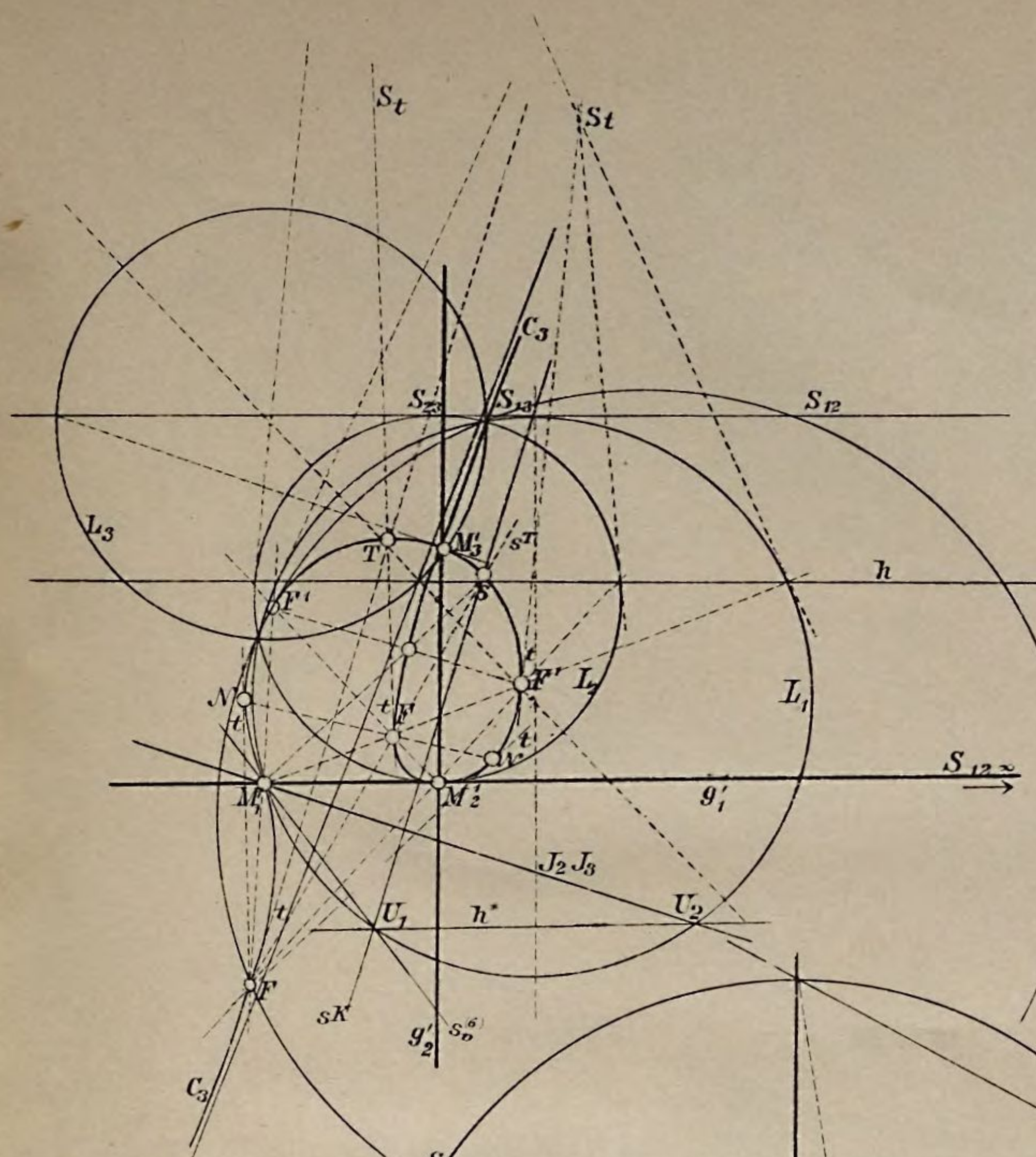


Fig.2.

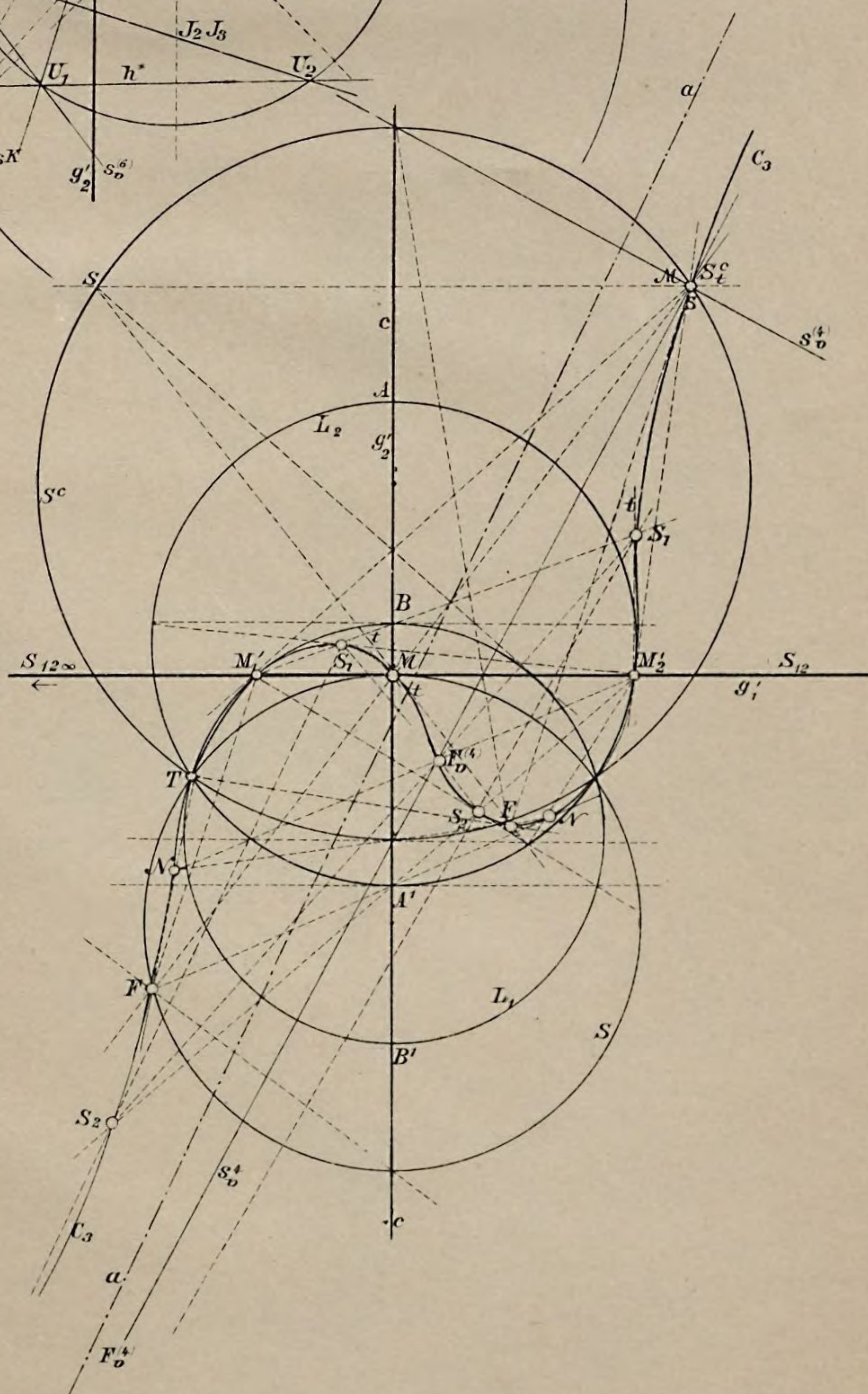
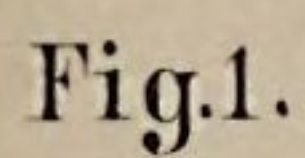


Fig.1.

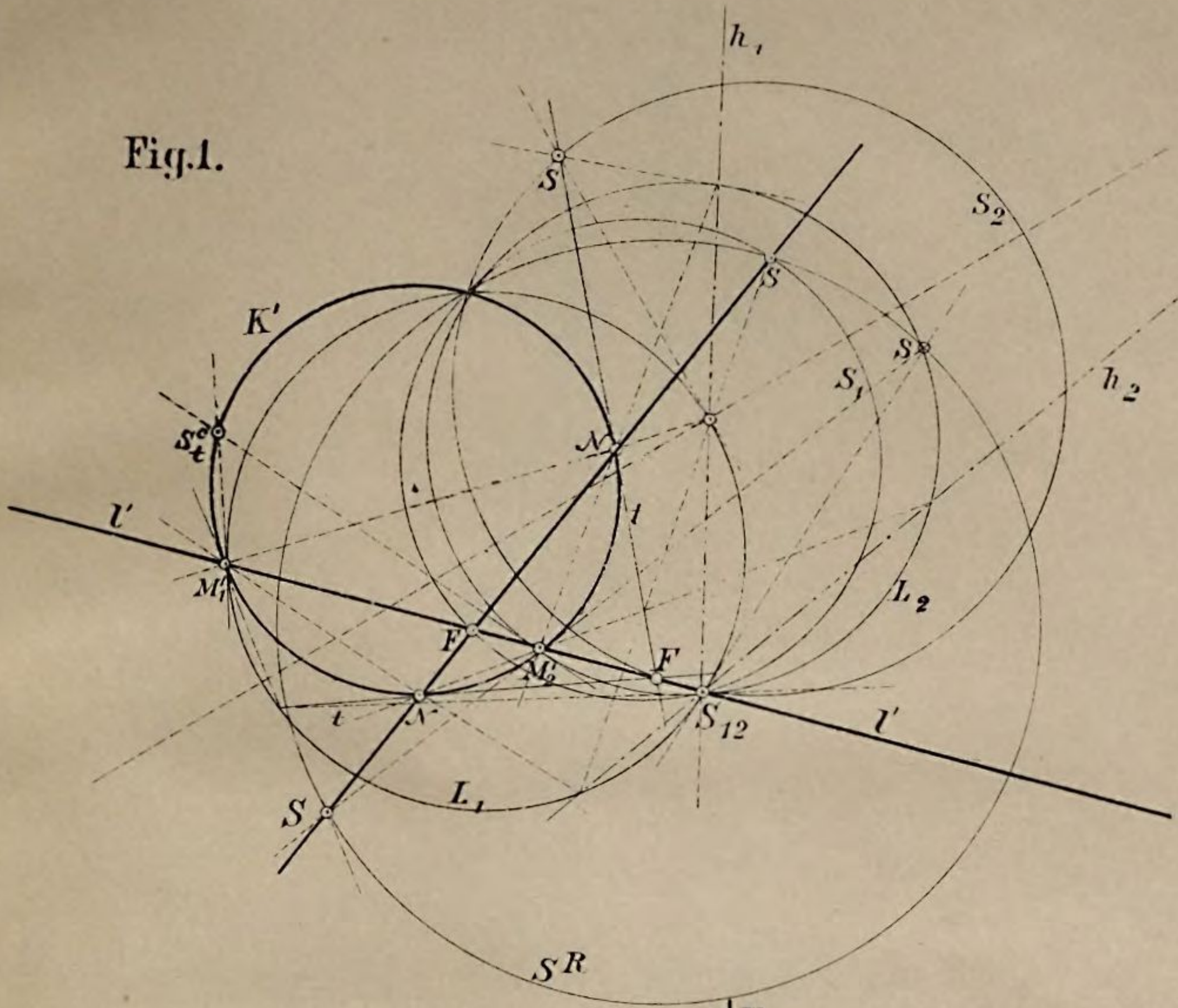
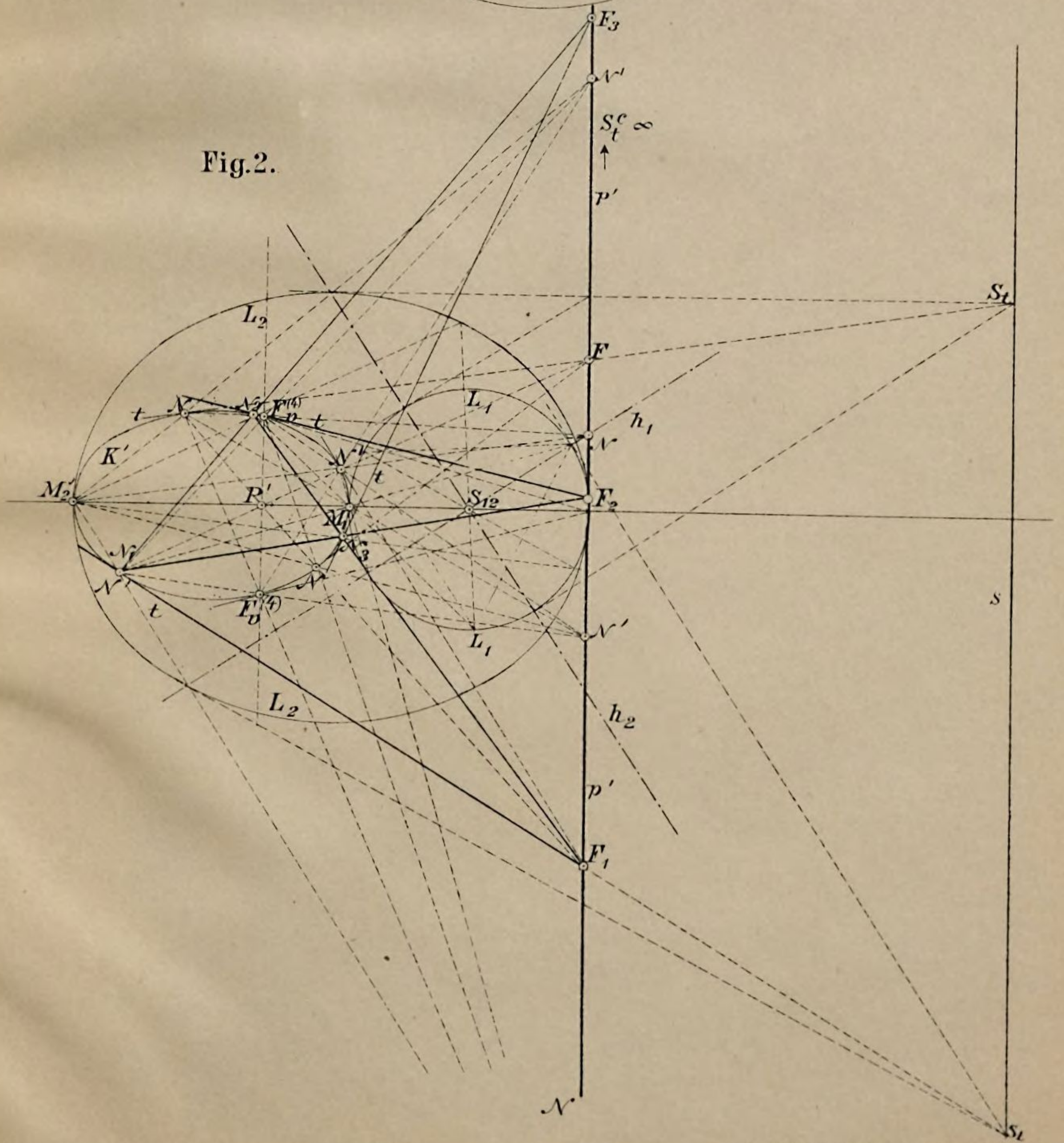
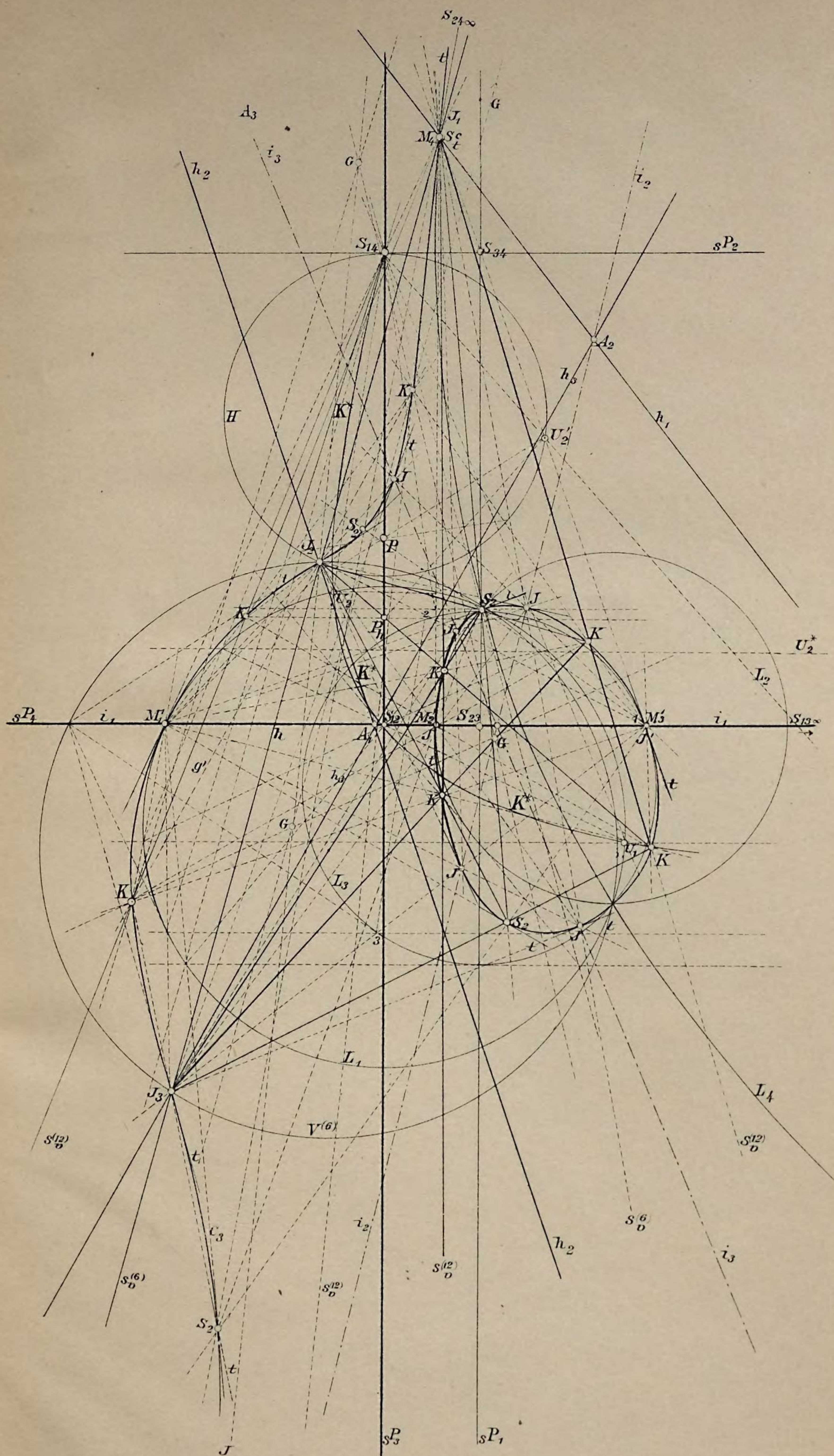


Fig.2.





Disteli, Martin

Die Steiner'schen Schliessungsprobleme nach darstellend geometrischer
Methode

1888

Math.p. 109 fo

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650820-9